Über die

Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische,

insbesondere über die

Reduction durch eine Transformation vierten Grades.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN

VORGELEGT

VON

OSKAR BOLZA
AUS BERGZABERN (RHEINPFALZ).

BERLIN.
BUCHDRUCKEREI VON GUSTAV SCHADE (OTTO FRANCKE).
Linienstr. 158.

Einleitung.

Das Problem der Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische ist in den letzten Jahren der Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Trotzdem ist die Anzahl der bisher bekannten Beispiele reducierbarer Integrale eine sehr geringe.

Speciell für $\varrho = 2$ sind lange Zeit die beiden Integrale von Jacobi[1]) das einzige Beispiel gewesen; dieselben sind durch rationale[2]) Transformationen zweiten Grades auf elliptische Integrale reducierbar, und Herr Königsberger hat im 67. Bande von Borchardts Journal nachgewiesen, dass dies zugleich die beiden allgemeinsten durch eine rationale Transformation zweiten Grades reducierbaren Integrale sind.

Das nächste Beispiel rührt von Herrn Hermite[3]) her: es sind zwei Integrale erster Gattung, welche durch Transformationen dritten Grades auf je ein elliptisches reducierbar sind; es sind dies jedoch nicht die beiden allgemeinsten durch eine Transformation dritten Grades reducierbaren Integrale, da sie nur von einem Parameter abhängen.

Diese allgemeinsten Integrale hat Herr Goursat in den Comptes Rendus Bd. C[4]) mitgeteilt.

Endlich hat der Verfasser der vorliegenden Arbeit in den Sitzungsberichten der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg, 1885, die beiden allgemeinsten, durch eine Transformation vierten Grades reducierbaren Integrale erster Gattung angegeben.

Die sämmtlichen angeführten Beispiele sind auf algebraischem Wege gefunden worden. Der Fall der Transformation zweiten Grades ist indessen auch mit Hilfe der Transformationstheorie der ϑ-Functionen untersucht worden von Herrn Königsberger[5]) und Herrn Pringsheim[6]) auf Grund des Satzes von Herrn Weierstrass, dass man im Falle der Reducierbarkeit

---

1) Gesammelte Werke, Bd. I, pg. 382.

2) Unter einer „rationalen Reduction $k$ten Grades" eines hyperelliptischen Integrals auf ein elliptisches ist eine solche verstanden, bei welcher die Variable des elliptischen Integrals eine rationale Function $k$ten Grades der Variabeln des hyperelliptischen Integrals ist. Jede algebraische Reduction lässt sich auf eine solche rationale zurückführen, vgl. Abel, Précis etc., Oeuvres complètes I, pg. 545 und Königsberger, Borchardt's Journal, Bd. 85, pg. 279.

3) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1876.

4) Vgl. auch Bulletin de la Société mathématique de France, Tome XIII.

5) Borchardt's Journal, Bd. 67, pg. 72.

6) Mathematische Annalen, Bd. 9, pg. 461.

durch eine Transformation höheren Grades zu einem System transformierter ϑ-Moduln gelangen kann, in welchem $\tau'_{12} = 0.$[1])

Inzwischen ist ein zweiter für das Reductionsproblem fundamentaler Satz von den Herren Weierstrass[2]) und Picard[3]) veröffentlicht worden, welcher eine weit einfachere Behandlung des Problems gestattet.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nun, *mit Hilfe dieses Satzes die Reduction vierten Grades* vollständig durchzuführen. Die Lösung dieser Aufgabe wird aber wesentlich erleichtert durch einige allgemeine auf den Satz der Herren Weierstrass und Picard bezügliche Untersuchungen, welche daher der Lösung der eigentlichen Aufgabe vorausgeschickt werden sollen. Es handelt sich dabei um die folgenden beiden Aufgaben:

1. Der mehrfach erwähnte Satz von Herrn Weierstrass und Picard sagt aus: „Wenn ein zu dem hyperelliptischen Gebilde:

$$y^2 = R(x)$$

vom Range zwei gehöriges Integral algebraisch auf ein elliptisches Integral reducierbar ist, so gibt es unter den unendlich vielen zu dem Gebilde gehörigen Systemen von ϑ-Moduln mindestens eines, für welches: $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, wo k eine positive ganze Zahl ist.“ Man erkennt leicht, dass es stets unendlich viele Systeme von ϑ-Moduln giebt, in welchen $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, sobald ein solches existiert; und die Aufgabe, welche im ersten Teil der vorliegenden Arbeit gelöst werden soll, ist nun: *alle* diese Systeme von ϑ-Moduln zu bestimmen.

2. Herr Picard hat in der oben citierten Abhandlung über die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung die Normalform von Richelot zu Grunde gelegt. Die einfache Form, welche Herr Goursat den beiden durch eine Transformation dritten Grades reducierbaren Integralen gegeben hat, legt es jedoch nahe, statt dessen eine *andere Normalform* einzuführen, welche der speciellen Natur des Reductionsproblems besser angepasst ist. Die Herstellung einer solchen Normalform und die Untersuchung der linearen Transformation derselben bilden den Inhalt des zweiten Teiles der Arbeit.

Hierdurch wird zugleich ein principiell wichtiger Teil des Reductionsproblems auf eine einfache Weise gelöst: Nach dem Satze der Herren Weierstrass und Picard gibt es allemal zwei zu demselben Gebilde gehörige durch Transformationen $k$ten Grades reducierbare Integrale erster Gattung, sobald es überhaupt eines gibt. Es ist nun verhältnissmässig leicht auf algebraischem Wege eines der beiden reducierbaren Integrale zu finden; es macht aber grosse Schwierigkeit, alsdann das zweite Integral zu bestimmen. Gerade diese Aufgabe wird sich nun hier sehr einfach erledigen: es wird sich zeigen, dass das zweite Integral und die zugehörige reducierende rationale Function ohne alle Rechnung durch eine blosse Buchstabenvertauschung gefunden werden kann, sobald das erste Integral und die zugehörige Reduction bestimmt ist.

---

[1]) Vgl. auch Hanel, Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische, Dissertation, Breslau 1882.

[2]) Siehe die Mitteilungen von Frau von Kowalevsky über die Untersuchungen von Herrn Weierstrass, Acta mathematica, Bd. 4, pg. 400.

[3]) Bulletin de la Société mathématique de France, Tome XI.

Unter Benutzung der in den beiden ersten Abschnitten gewonnenen Resultate wird dann im dritten, vierten und fünften Teil der Arbeit für $k = 4$ das Reductionsproblem mit Hilfe der Transformationstheorie der ϑ-Functionen gelöst. Es wird zunächst die Bedingungsgleichung zwischen den Wurzeln der ganzen Function sechsten Grades abgeleitet, sodann werden die Constanten der beiden reducierbaren Integrale als algebraische Functionen von zwei unabhängigen Parametern dargestellt, und endlich wird die rationale Function vierten Grades bestimmt, durch welche die Reduction geleistet wird.

I.

Über die Gruppe von linearen Transformationen, durch welche $\tau_{12} = \frac{1}{k}$ in sich selbst transformiert wird.

Die Aufgabe, die wir uns in diesem ersten Abschnitt stellen, lässt sich auch so formulieren:

Unter der Voraussetzung, dass $\tau_{12} = \frac{1}{k}$, *wo k eine positive ganze Zahl ist, alle linearen Transformationen zu bestimmen, für welche in dem transformierten System von* ϑ - *Moduln* $\tau'_{12} = \frac{1}{k}$.

Zur Lösung haben wir folgende Formeln aus der Theorie der linearen Transformation der hyperelliptischen Functionen nötig:

Es sei τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} ein zu dem Gebilde

$$Y^2 = A_0 (X - a_0)(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)(X - a_5) \qquad (1)$$

(a_0, a_1 ... a_5 von einander verschieden) gehöriges System von ϑ-Moduln, und es werde auf dieselbe eine lineare Transformation[1]) angewendet, welche durch das System von Transformationszahlen:

$$\begin{array}{cc|cc} \varrho_{11} & \varrho_{21} & \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \varrho_{12} & \varrho_{22} & \sigma_{12} & \sigma_{22} \\ \hline \varrho'_{11} & \varrho'_{21} & \sigma'_{11} & \sigma'_{21} \\ \varrho'_{12} & \varrho'_{22} & \sigma'_{12} & \sigma'_{22} \end{array} \qquad (2)$$

definiert wird, zwischen welchen die Relationen bestehen:

---

[1]) Siehe Hermite, Comptes rendus, Bd. 40.
Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, pg. 106.
Briot, Théorie des fonctions abéliennes, pg. 58.

Ich schliesse mich hier und im Folgenden der Bezeichnungsweise von Herrn Königsberger an (Borchardt's Journal, Bd. 67, pg. 59); darnach ist die lineare Transformation (2) — abweichend von der Bezeich-

$$\left.\begin{array}{ll}\sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha}-\varrho_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{2\alpha})=0 \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\sigma_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\sigma'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{1\alpha}-\sigma_{1\alpha}\varrho'_{1\alpha})=1 \\ \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{1\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{1\alpha})=0, & \sum\limits_{\alpha=1,2}(\varrho_{2\alpha}\sigma'_{2\alpha}-\sigma_{2\alpha}\varrho'_{2\alpha})=1\end{array}\right\} \quad (3)$$

Dann drücken sich die transformierten ϑ-Moduln τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} folgendermassen durch die ursprünglichen aus[1]):

$$\left.\begin{array}{ll}\tau'_{11}=\dfrac{\omega'_{11}\omega_{22}-\omega'_{21}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{21}=\dfrac{\omega'_{12}\omega_{22}-\omega'_{22}\omega_{12}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}} \\ \tau'_{12}=\dfrac{\omega'_{21}\omega_{11}-\omega'_{11}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}, & \tau'_{22}=\dfrac{\omega'_{22}\omega_{11}-\omega'_{12}\omega_{21}}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}\end{array}\right\} \quad (4)$$

Darin bedeuten:

$$\left.\begin{array}{ll}\omega_{11}=\varrho_{11}+\sigma_{11}\tau_{11}+\sigma_{21}\tau_{12}, & \omega_{21}=\varrho_{21}+\sigma_{11}\tau_{21}+\sigma_{21}\tau_{22} \\ \omega_{12}=\varrho_{12}+\sigma_{12}\tau_{11}+\sigma_{22}\tau_{12}, & \omega_{22}=\varrho_{22}+\sigma_{12}\tau_{21}+\sigma_{22}\tau_{22} \\ \omega'_{11}=\varrho'_{11}+\sigma'_{11}\tau_{11}+\sigma'_{21}\tau_{12}, & \omega'_{21}=\varrho'_{21}+\sigma'_{11}\tau_{21}+\sigma'_{21}\tau_{22} \\ \omega'_{12}=\varrho'_{12}+\sigma'_{12}\tau_{11}+\sigma'_{22}\tau_{12}, & \omega'_{22}=\varrho'_{22}+\sigma'_{12}\tau_{21}+\sigma'_{22}\tau_{22}\end{array}\right\} \quad (5)$$

Ferner bestehen zwischen den zu τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gehörigen Normalintegralen erster Gattung u_1, u_2 und den zu τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} gehörigen u'_1, u'_2 die Relationen:

$$du'_1=\frac{\omega_{22}\,du_1-\omega_{12}\,du_2}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}},\quad du'_2=\frac{-\omega_{21}\,du_1+\omega_{11}\,du_2}{\omega_{11}\omega_{22}-\omega_{12}\omega_{21}}. \quad (6)$$

Ich behaupte nun zunächst: Wenn $\tau_{12}=\frac{1}{k}$ ist, so muss, wenn auch $\tau'_{12}=\frac{1}{k}$ werden soll, entweder $\omega_{12}=0$, $\omega_{21}=0$ sein, oder $\omega_{11}=0$, $\omega_{22}=0$.

Beweis: Wenn $\tau_{12}=\frac{1}{k}$, so sind nach Herrn Picard die beiden zugehörigen Normalintegrale erster Gattung u_1 und u_2 auf je ein elliptisches Integral reducierbar, und zwar beide durch rationale Transformationen $k$ten Grades[2]). Wenn nun auch $\tau'_{12}=\frac{1}{k}$ ist, so gilt dasselbe von u'_1 und u'_2; auch diese beiden Integrale sind dann auf je ein elliptisches Integral reducierbar, und zwar ebenfalls durch rationale Transformationen $k$ten Grades. Nun kann es aber nach einem von Herrn Weierstrass in einer brieflichen Mitteilung an Herrn Königsberger[3]) ausgesprochenen Satze, von welchem Herr Biermann[4]) einen Beweis veröffentlicht hat, „im

---

nung von Herrn Hermite — so zu verstehen, dass sich die neuen Perioden ($\tilde\omega_1$, $\tilde\omega_2$, $\tilde\omega'_1$, $\tilde\omega'_2$) mittels der kanonischen Substitution (2) durch die alten (ω_1, ω_2, ω'_1, ω'_2) ausdrücken, also:

$$\tilde\omega_1=\varrho_{11}\omega_1+\varrho_{21}\omega_2+\sigma_{11}\omega'_1+\sigma_{21}\omega'_2 \text{ etc.}$$

[1]) Vgl. Königsberger, a. a. O.

[2]) Es muss noch hinzugefügt werden, dass diese Reductionen, wie sich leicht zeigen lässt, unzerlegbar sind, d. h. dass sie sich nicht zusammensetzen lassen aus einer Reduction niedrigeren Grades und aus einer Transformation des elliptischen Integrals.

[3]) Borchardt's Journal, Bd. 67, pg. 73.

[4]) Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 87, pg. 983.

allgemeinen" nicht mehr als zwei wesentlich verschiedene zu demselben Gebilde (1) gehörige Integrale erster Gattung geben, welche algebraisch — geschweige denn durch Transformationen von demselben Grade — auf je ein elliptisches Integral reducierbar sind; daraus folgt, dass u'_1 und u'_2 von u_1 und u_2 nicht wesentlich verschieden sein können, dass also entweder:

$$du'_1 = \text{Const.}\, du_1, \quad du'_2 = \text{Const.}\, du_2$$

oder:

$$du'_1 = \text{Const.}\, du_2, \quad du'_2 = \text{Const.}\, du_1$$

sein muss. Hieraus ergibt sich aber nach (6), dass entweder:

$$\omega_{12} = 0, \ \omega_{21} = 0 \text{ sein muss, oder}$$

$$\omega_{11} = 0, \ \omega_{22} = 0, \text{ was zu beweisen war.}$$

Um aber diesen Schluss ganz einwurfsfrei zu machen, muss das „im allgemeinen", welches in dem dabei benutzten Hilfssatz vorkommt, genauer erklärt werden. Dies geschieht durch Beantwortung der Frage:

Unter welchen Bedingungen gibt es ausser den beiden Normalintegralen u_1 und u_2 noch ein drittes von jenen beiden wesentlich verschiedenes Integral erster Gattung, welches ebenfalls auf ein elliptisches Integral reducierbar ist?

Angenommen es sei u ein solches; dann können wir setzen:

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_0$$

wo c_1 und c_2 zwei Constanten sind, welche beide von Null verschieden sind.

Nach der Definition der Normalintegrale erster Gattung gibt es ein System von Periodenwegen, auf welchen u_1 und u_2 die Perioden besitzen:

$$\begin{array}{c|l} u_1 & 1, \ 0, \ \tau_{11}, \ \frac{1}{k} \\[1ex] u_2 & 0, \ 1, \ \frac{1}{k}, \ \tau_{22} \end{array}$$

Die hierzu simultanen Perioden von u sind dann:

$$c_1, \ c_2, \ c_1 \tau_{11} + \frac{c_2}{k}, \ \frac{c_1}{k} + c_2 \tau_{22}.$$

Sind nun $2\,\Omega$, $2\,\Omega'$ ein Paar Primitivperioden des elliptischen Integrals, auf welches nach Voraussetzung u reducierbar sein soll, so müssen sich die Perioden von u linear, homogen und ganzzahlig durch $2\,\Omega$, $2\,\Omega'$ ausdrücken lassen; sei:

$$c_1 = 2\,n_1\,\Omega + 2\,n'_1\,\Omega'$$
$$c_2 = 2\,n_2\,\Omega + 2\,n'_2\,\Omega'$$
$$c_1 \tau_{11} + c_2 \cdot \frac{1}{k} = -(2\,m_1\,\Omega + 2\,m'_1\,\Omega')$$
$$c_1 \cdot \frac{1}{k} + c_2 \tau_{22} = -(2\,m_2\,\Omega + 2\,m'_2\,\Omega').$$

Dann folgt durch Elimination der Grössen c_1, c_2, $2\,\Omega$, $2\,\Omega'$[1]):

$$\frac{(k\,m_1 + n_2) + n_1\,k\,\tau_{11}}{(k\,m'_1 + n'_2) + n'_1\,k\,\tau_{11}} = \frac{(k\,m_2 + n_1) + n_2\,k\,\tau_{22}}{(k\,m'_2 + n'_1) + n'_2\,k\,\tau_{22}}$$

[1]) Vgl. die Mitteilungen von Frau von Kowalevsky über die Untersuchungen von Herrn Weierstrass, Acta mathematica Bd. 4, pg. 396.

Diese Gleichung kann nicht etwa eine für beliebige τ_{11}, τ_{22} gültige Identität sein, wie aus der Voraussetzung folgt, dass c_1 und $c_2 \gtrless 0$. Man kann die Gleichung also nach τ_{22} auflösen und erhält $k\,\tau_{22}$ als gebrochene lineare ganzzahlige Function von $k\,\tau_{11}$. Nun sind aber nach Herrn Picard die Grössen $\tau_1 = k\,\tau_{11}$ und $\tau_2 = k\,\tau_{22}$ nichts anderes als die ϑ-Moduln der beiden elliptischen Integrale, auf welche u_1 und u_2 reducierbar sind.

Daraus folgt das Resultat:

Soll ausser den beiden Integralen u_1 und u_2 noch ein drittes, von jenen wesentlich verschiedenes Integral erster Gattung existieren, welches auf ein elliptisches Integral reducierbar[1]) *ist, so müssen die beiden elliptischen Integrale, auf welche u_1 und u_2 reducierbar sind, ineinander transformierbar sein.*

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es, wie aus der Transformationstheorie der elliptischen Functionen folgt, nicht nur drei, sondern unendlich viele zu demselben Gebilde (1) gehörige Integrale erster Gattung, welche algebraisch auf je ein elliptisches Integral reducierbar sind, in Uebereinstimmung mit einem allgemeinen Satze von Herrn Poincaré[2]).

Sehen wir also vorläufig von dem Ausnahmefall, in welchem τ_{22} eine lineare ganzzahlige Function von τ_{11} ist, ab, so können wir den oben durchgeführten Schluss anwenden, nach welchem sich ergab, dass entweder $\omega_{12} = 0$, $\omega_{21} = 0$ sein muss oder $\omega_{11} = 0$, $\omega_{22} = 0$.

Uebrigens lässt sich dasselbe Resultat nach einiger Rechnung auch ohne den hier benutzten Hülfssatz direct aus den Gleichungen (4) herleiten.

Die beiden Fälle sind nun weiter getrennt zu behandeln.

1. Fall: $\omega_{12} = 0$, $\omega_{21} = 0$.

Nach (5) ist:

$$\omega_{12} = \varrho_{12} + \sigma_{12}\,\tau_{11} + \sigma_{22} \cdot \frac{1}{k}$$

$$\omega_{21} = \varrho_{21} + \sigma_{11} \cdot \frac{1}{k} + \sigma_{21}\,\tau_{22}.$$

Da τ_{11} und τ_{22} nicht reell sein können, so folgt hieraus:

$$\sigma_{11} = -k\,\varrho_{21},\quad \sigma_{12} = 0,\quad \sigma_{21} = 0,\quad \sigma_{22} = -k\,\varrho_{12}.$$

Man schliesst nun weiter, dass ω_{11} und ω_{22} beide $\gtrless 0$ sein müssen, wenn $\omega_{12} = 0$, $\omega_{21} = 0$; denn wäre z. B. $\omega_{11} = 0$, so würde nach (5) folgen: $\varrho_{11} = 0$, $\sigma_{11} = 0$. Man hätte also gleichzeitig:

$$\varrho_{11} = 0,\quad \varrho_{21} = 0,\quad \sigma_{11} = 0,\quad \sigma_{21} = 0$$

und dies würde gegen die Gleichungen (3) verstossen. Setzt man daher in den Ausdrücken (4)

---

[1]) Soll auch die Reduction dieses dritten Integrals u unzerlegbar und vom Grade k sein, so müssen die ganzen Zahlen m, n folgende Bedingungen erfüllen:

a) Die sechs in der Matrix:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & -m_1 & -m_2 \\ n'_1 & n'_2 & -m'_1 & -m'_2 \end{vmatrix}$$

enthaltenen Determinanten zweiten Grades dürfen keinen gemeinsamen Teiler haben.

b) $k\,(m_1 n'_1 - m'_1 n_1) - (n_1 n'_2 - n'_1 n_2) > 0$

$k\,(m_2 n'_2 - m'_2 n_2) + (n_1 n'_2 - n'_1 n_2) > 0$

c) $m_1 n'_1 - m'_1 n_1 + m_2 n'_2 - m'_2 n_2 = k$

[2]) Comptes rendus, Tome XCIX.

für τ'_{12} und τ'_{21} $\omega_{12} = 0$, $\omega_{21} = 0$ ein, so werden diese Ausdrücke nicht etwa illusorisch, sondern liefern ganz bestimmte Werte:

$$\tau'_{12} = \frac{\omega'_{21}}{\omega_{22}} = \frac{\omega'_{12}}{\omega_{11}} = \tau'_{21}.$$

Setzt man hierin $\tau'_{12} = \tau'_{21} = \frac{1}{k}$ und für die ω ihre Werte aus (5), so kommt:

$$\frac{1}{k} = \frac{(k\varrho'_{21} + \sigma'_{11}) + \sigma'_{21} k \tau_{22}}{(k\varrho_{22} + \sigma_{12}) + \sigma_{22} k \tau_{22}} = \frac{(k\varrho'_{12} + \sigma'_{22}) + k\sigma'_{12}\tau_{11}}{(k\varrho_{11} + \sigma_{21}) + k\sigma_{11}\tau_{11}}.$$

Hieraus ergibt sich, indem man die bereits gefundenen Werte von σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22} einsetzt und wieder beachtet, dass τ_{11} und τ_{22} keine reellen Zahlen sein können:

$$\sigma'_{11} = \varrho_{22} - k\varrho'_{21},\ \sigma'_{12} = -\varrho_{21},\ \sigma'_{21} = -\varrho_{12},\ \sigma'_{22} = \varrho_{11} - k\varrho'_{12},$$

so dass das Tableau für die Transformationszahlen (2) nunmehr lautet:

$$\left.\begin{array}{cc|cc} \varrho_{11} & \varrho_{21} & -k\varrho_{21} & 0 \\ \varrho_{12} & \varrho_{22} & 0 & -k\varrho_{12} \\ \hline \varrho'_{11} & \varrho'_{21} & \varrho_{22} - k\varrho'_{21} & -\varrho_{12} \\ \varrho'_{12} & \varrho'_{22} & -\varrho_{21} & \varrho_{11} - k\varrho'_{12} \end{array}\right\} \quad (7a)$$

und die Relationen (3) reducieren sich auf die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_{11}\varrho'_{21} - \varrho_{21}\varrho'_{11} + \varrho_{12}\varrho'_{22} - \varrho_{22}\varrho'_{12} = 0 \\ \varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{12}\varrho_{21} - k(\varrho_{11}\varrho'_{21} - \varrho_{21}\varrho'_{11}) = 1, \end{array}\right\} \quad (8a)$$

während alle übrigen Gleichungen (3) identisch erfüllt werden.

Umgekehrt zeigen die Gleichungen (4): Nimmt man irgend ein System ganzer Zahlen ϱ, ϱ', welche den Gleichungen (8a) genügen, so stellt das Coefficiententableau (7a) eine kanonische Substitution von der Determinante 1 dar, durch welche das Modulsystem τ_{11}, $\frac{1}{k}$, τ_{22} transformiert wird in:

$$\left.\begin{array}{l} \tau'_{11} = \dfrac{(k\varrho'_{11} - \varrho_{12}) + (\varrho_{22} - k\varrho'_{21}) k\tau_{11}}{k(\varrho_{11} - \varrho_{21} k\tau_{11})} \\ \tau'_{12} = \dfrac{1}{k} = \tau'_{21} \\ \tau'_{22} = \dfrac{(k\varrho'_{22} - \varrho_{21}) + (\varrho_{11} - k\varrho'_{12}) k\tau_{22}}{k(\varrho_{22} - \varrho_{12} k\tau_{22})} \end{array}\right\} \quad (9a)$$

und zugleich folgt aus (6):

$$\left.\begin{array}{l} du'_1 = \dfrac{du_1}{\omega_{11}} = \dfrac{du_1}{\varrho_{11} - k\varrho_{21}\tau_{11}} \\ du'_2 = \dfrac{du_2}{\omega_{22}} = \dfrac{du_2}{\varrho_{22} - k\varrho_{12}\tau_{22}}. \end{array}\right| \quad (10a)$$

2. Fall: $\omega_{11} = 0$, $\omega_{22} = 0$.

Ganz in derselben Weise ergibt sich hier das Coefficiententableau:

$$\left.\begin{array}{cc|cc} \varrho_{11} & \varrho_{21} & 0 & -k\varrho_{11} \\ \varrho_{12} & \varrho_{22} & -k\varrho_{22} & 0 \\ \hline \varrho'_{11} & \varrho'_{21} & -\varrho_{22} & \varrho_{12} - k\varrho'_{11} \\ \varrho'_{12} & \varrho'_{22} & \varrho_{21} - k\varrho'_{22} & -\varrho_{11} \end{array}\right\} \quad (7b)$$

mit den Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\varrho_{11}\varrho'_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{11}+\varrho_{12}\varrho'_{22}-\varrho_{22}\varrho'_{12}&=0\\ \varrho_{11}\varrho_{22}-\varrho_{12}\varrho_{21}-k(\varrho_{11}\varrho'_{21}-\varrho_{21}\varrho'_{11})&=-1.\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{b})$$

Und umgekehrt liefert auch hier jedes so definierte System ganzer Zahlen eine kanonische Substitution von der Determinante 1, welche die Moduln τ_{11}, $\frac{1}{k}$, τ_{22} überführt in:

$$\left.\begin{aligned}\tau'_{11}&=\frac{(k\varrho'_{21}-\varrho_{22})+(\varrho_{12}-k\varrho'_{11})k\tau_{22}}{k(\varrho_{21}-k\varrho_{11}\tau_{22})}\\ \tau'_{12}&=\frac{1}{k}=\tau'_{21}\\ \tau'_{22}&=\frac{(k\varrho'_{12}-\varrho_{11})+(\varrho_{21}-k\varrho'_{22})k\tau_{11}}{k(\varrho_{12}-\varrho_{22}k\tau_{11})}\end{aligned}\right\}\qquad(9\text{b})$$

und es ist:

$$\left.\begin{aligned}du'_1&=\frac{du_2}{\omega_{21}}=\frac{du_2}{\varrho_{21}-\varrho_{11}k\tau_{22}}\\ du'_2&=\frac{du_1}{\omega_{12}}=\frac{du_1}{\varrho_{12}-\varrho_{22}k\tau_{11}}\end{aligned}\right\}\qquad(10\text{b})$$

Das Resultat unserer Untersuchung ist also:

Alle kanonischen Substitutionen von der Determinante 1, welche das Modulsystem

$$\tau_{11},\ \frac{1}{k},\ \tau_{22}$$

überführen in ein transformiertes Modulsystem

$$\tau'_{11},\ \frac{1}{k},\ \tau'_{22}$$

sind enthalten in den beiden Tableaux (7a) mit den Bedingungen (8a), und (7b) mit den Bedingungen (8b). Und umgekehrt liefert jede so definierte kanonische Substitution:

$$\tau'_{12}=\frac{1}{k}.$$

Der Satz verliert seine Giltigkeit in dem speciellen Falle, wo τ_{22} sich linear und ganzzahlig durch τ_{11} ausdrücken lässt; alsdann liefern zwar immer noch die kanonischen Substitutionen (7a) und (7b) für den transformierten Modul τ'_{12} den Wert $\frac{1}{k}$; aber in diesem Falle gibt es ausser diesen noch andere kanonische Substitutionen der verlangten Art. Wir gehen jedoch auf diesen Ausnahmefall nicht weiter ein, da derselbe für das folgende ohne Bedeutung ist.

Dagegen werden wir später von der folgenden Bemerkung Gebrauch zu machen haben: Setzt man

$$\begin{aligned}\tau_1&=k\tau_{11},&\tau_2&=k\tau_{22}\\ \tau'_1&=k\tau'_{11},&\tau'_2&=k\tau'_{22}\end{aligned}$$

so wird durch die Gleichungen (9a) τ'_1 als ganzzahlige gebrochene lineare Function von τ_1 ausgedrückt, deren Determinante in Folge von (8a) gleich $+1$ ist; in derselben Weise drückt

sich τ'_2 durch τ_2 aus. Daher kann man mit Hilfe der Formeln für die lineare Transformation der elliptischen ϑ-Functionen die elliptischen ϑ-Functionen mit dem Modul τ'_1 resp. τ'_2 durch die elliptischen ϑ-Functionen mit dem Modul τ_1 resp. τ_2 ausdrücken.

Ganz analoges ergibt sich für die Transformationen der zweiten Art.

II.

Neue Normalform für das hyperelliptische Gebilde vom Range zwei.

Wir stellen uns in diesem Abschnitt die Aufgabe an Stelle der Richelot'schen Normalform für das hyperelliptische Gebilde vom Range zwei eine andere zu setzen, welche für das Reductionsproblem besonders geeignet ist. Trotzdem werden wir dabei, um bekannte Formeln benutzen zu können, von der Richelot'schen Normalform ausgehen.

Wie schon mehrfach erwähnt, sind die beiden zum Gebilde (1) gehörigen reducierbaren Integrale erster Gattung die beiden zu dem Modulsystem

$$\tau_{11},\ \frac{1}{k},\ \tau_{22}$$

gehörigen *Normalintegrale erster Gattung*. Man wird daher die gesuchte Normalform so zu wählen haben, dass die beiden Normalintegrale eine möglichst einfache Form annehmen.

Behandeln wir die Aufgabe zunächst allgemein, unabhängig von dem speciellen Fall der Reducierbarkeit, und sei:

$$Y^2 = A_0 (X - a_0)(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)(X - a_5) = R(X) \qquad (1)$$

wo alle a von einander verschieden, ein beliebiges hyperelliptisches Gebilde vom Range zwei. Sei ferner

$$\tau_{11},\ \tau_{12},\ \tau_{22}$$

ein zu dem Gebilde (1) gehöriges System von ϑ-Moduln. Dann gehört zu diesem System von ϑ-Moduln eine bestimmte Richelot'sche Normalform, deren Integralmoduln $\varkappa$, λ, μ nach Rosenhain[1]) geliefert werden durch die Formeln:

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}\,\vartheta_4}{\vartheta_{01}\,\vartheta_5},\quad \lambda = \frac{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}}{\vartheta_{12}\,\vartheta_{01}},\quad \mu = \frac{\vartheta_{03}\,\vartheta_4}{\vartheta_{12}\,\vartheta_5}. \qquad (11)$$

Dabei bedeuten die Grössen ϑ_α die Nullwerte der ϑ-Functionen zweier Variabeln mit den Moduln τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} in der Weierstrass'schen Bezeichnungsweise.

Man kann dann die Reihenfolge, in welcher die Wurzeln von $R(X)$ mit a_0 bis a_5 bezeichnet werden, stets so wählen, dass das Gebilde (1) durch die eindeutige Transformation[2]):

---

[1]) Mémoires présentés par divers savants etc. Tome XI, pag. 417. Da von verschiedenen Autoren verschiedene Übertragungen der Rosenhain'schen Formeln in die Weierstrass'sche Bezeichnungsweise benutzt werden, so bemerke ich, dass ich mich durchweg an die von Herrn Königsberger im 64. Bande des Borchardt'schen Journals (pg. 39) angewandte Übertragung halten werde.

[2]) Richelot, Crelles Journal, Bd. 12.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{(a_3 - a_5)(X - a_4)}{(a_3 - a_4)(X - a_5)} \\ \eta &= L \cdot \frac{Y}{(X - a_5)^3} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

wo:

$$L = \frac{(a_4 - a_5)^2}{a_3 - a_4} \sqrt{\frac{(a_3 - a_5)}{A_0 (a_0 - a_4)(a_1 - a_4)(a_2 - a_4)}}$$

übergeht in das Gebilde:

$$\eta^2 = \xi (1 - \xi)(1 - \varkappa^2 \xi)(1 - \lambda^2 \xi)(1 - \mu^2 \xi). \qquad (13)$$

Durch dieselbe Transformation (12) nehmen dann die beiden zu dem Modulsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gehörigen Normalintegrale erster Gattung u_1, u_2 die Form an:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{(B_1 - C_1 \xi)\, d\xi}{\eta} \\ u_2 &= \int \frac{(B_2 - C_2 \xi)\, d\xi}{\eta} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Darin haben die Constanten B_1, C_1, B_2, C_2 nach Rosenhain[1]) folgende Werte:

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\vartheta_{02}^{(2)}}{\vartheta_{12} \vartheta_{01} \vartheta_5}, \qquad C_1 = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\vartheta_{03} \vartheta_{23} \vartheta_4 \vartheta_{13}^{(2)}}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2},$$

$$B_2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\vartheta_{02}^{(1)}}{\vartheta_{12} \vartheta_{01} \vartheta_5}, \qquad C_2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\vartheta_{03} \vartheta_{23} \vartheta_4 \vartheta_{13}^{(1)}}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2},$$

wobei zur Abkürzung

$$\left[\frac{\partial \vartheta (v_1, v_2)_\beta}{\partial v_\alpha}\right]_{v_1 = 0,\; v_2 = 0} = \vartheta_\beta^{(\alpha)}$$

gesetzt ist.

Die Zähler der Integranden der beiden Normalintegrale erster Gattung haben hier, wie man sieht, ziemlich complicierte Ausdrücke. Um nun diese beiden Normalintegrale in einer möglichst einfachen Form zu erhalten, wollen wir die Constanten der eindeutigen Transformation:

$$\xi = \frac{a + bx}{a' + b'x}, \quad \eta = M \cdot \frac{y}{(a' + b'x)^3},$$

durch welche das Gebilde (13) übergehen möge in:

$$y^2 = R_1(x),$$

so bestimmen, *dass durch diese Transformation die beiden Normalintegrale* u_1, u_2 *die Form annehmen:*

$$u_1 = \int \frac{dx}{y}, \quad u_2 = \int \frac{x\, dx}{y}.$$

Man erreicht dies durch die Substitution

---

[1]) a. a. O. pg. 432.

$$\frac{B_2 - C_2\,\xi}{B_1 - C_1\,\xi} = x, \text{ oder}$$

$$\xi = \frac{-B_2 + B_1\,x}{-C_2 + C_1\,x}.$$

Indem man hierin die Werte von B_1, C_1, B_2, C_2 einsetzt, erhält man:

$$\xi = \frac{\vartheta_5\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{12}}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_4}\;\frac{\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}. \tag{16}$$

Man hat jetzt weiter, um die Function $R_1(x)$ zu erhalten, die Differenzen $1-\xi$, $1-x^2\xi$, $1-\lambda^2\xi$, $1-\mu^2\xi$ durch x auszudrücken. Berücksichtigt man dabei die Rosenhain'schen Relationen [1]), welche zwischen den Nullwerten der partiellen Ableitungen der ungeraden ϑ-Functionen bestehen, insbesondere die Formeln, welche Herr Krause im dritten Bande der Acta mathematica pg. 156 angegeben hat [2]), so findet man nach einer einfachen Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}
1-\xi &= -\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_{34}}{\vartheta_4\,\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}}\;\frac{\vartheta_1^{(1)} + \vartheta_1^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}\\
1-x^2\xi &= -\frac{\vartheta_2\,\vartheta_{14}\,\vartheta_{34}}{\vartheta_5\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{03}}\;\frac{\vartheta_{04}^{(1)} + \vartheta_{04}^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}\\
1-\lambda^2\xi &= -\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_{14}}{\vartheta_4\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{12}}\;\frac{\vartheta_3^{(1)} + \vartheta_3^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}\\
1-\mu^2\xi &= -\frac{\vartheta_0\,\vartheta_{14}\,\vartheta_{34}}{\vartheta_5\,\vartheta_{12}\,\vartheta_{23}}\;\frac{\vartheta_{24}^{(1)} + \vartheta_{24}^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Daraus folgt nach (13)

$$\eta^2 = \frac{\vartheta_0^4\,\vartheta_2^4\,\vartheta_{34}^4\,\vartheta_{14}^4}{\vartheta_{03}^2\,\vartheta_{23}^2\,\vartheta_4^2}\cdot\frac{\prod\limits_{(\alpha)}''(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\,x)}{\prod\limits_{(\alpha)}'\vartheta_\alpha\cdot(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)})^6},$$

dabei ist das Productzeichen $\prod'$ über alle zehn geraden, das Zeichen $\prod''$ über alle sechs ungeraden ϑ-Indices zu erstrecken.

Ferner ist:

$$d\xi = \frac{B_2\,C_1 - B_1\,C_2}{(-C_2 + C_1\,x)^2}\,dx$$

$$B_1 - C_1\,\xi = \frac{B_2\,C_1 - B_1\,C_2}{-C_2 + C_1\,x},\quad B_2 - C_1\,\xi = \frac{B_2\,C_1 - B_1\,C_2}{-C_2 + C_1\,x}.$$

---

[1]) a. a. O. pg. 428.

[2]) Man hat dabei zu beachten, dass Herr Krause eine andere Uebertragung anwendet als die hier benutzte von Herrn Königsberger. Die beiden Uebertragungsarten gehen in einander über durch die lineare Transformation: $\tilde\omega_1 = \omega_2$, $\tilde\omega_2 = \omega_1$, $\tilde\omega'_1 = \omega'_2$, $\tilde\omega'_2 = \omega'_1$, für welche: $\tau'_{11} = \tau_{22}$, $\tau'_{12} = \tau_{12}$, $\tau'_{22} = \tau_{11}$; $v'_1 = v_2$, $v'_2 = v_1$, während die ϑ-Indices folgende Permutation erfahren:

5, 0, 1, 2, 3, 4, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34,
5, 0, 04, 03, 02, 01, 4, 3, 2, 1, 34, 24, 14, 23, 13, 12.

Berücksichtigt man die Relation

$$\vartheta_{02}^{(1)}\,\vartheta_{13}^{(2)} - \vartheta_{02}^{(2)}\,\vartheta_{13}^{(1)} = \pi^2\,\vartheta_{34}\,\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_{14}$$

so folgt aus (15):

$$B_2\,C_1 - B_1\,C_2 = \frac{1}{4\,\pi^2}\,\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_4\,\vartheta_{03}\,\vartheta_{14}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{34}}{\vartheta_{12}^3\,\vartheta_{01}^3\,\vartheta_5^3}$$

und endlich aus (14):

$$d\,u_1^2 = \frac{(B_1 - C_1\,\xi)^2\,d\,\xi^2}{\eta^2} = \frac{\pi^4}{4}\,\frac{\prod\limits_{(\alpha)}{}'\vartheta_\alpha\cdot dx^2}{\prod\limits_{(\alpha)}{}''(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\,x)}$$

$$d\,u_2^2 + \frac{(B_2 - C_2\,\xi)^2\,d\,\xi^2}{\eta^2} = \frac{\pi^4}{4}\,\frac{\prod\limits_{(\alpha)}{}'\vartheta_\alpha\cdot x^2\,dx^2}{\prod\limits_{(\alpha)}{}''(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\,x)}$$

Um also u_1 und u_2 in der gewünschten Form zu erhalten, müssen wir setzen:

$$y^2 = \frac{4}{\pi^4}\cdot\frac{\prod\limits_{(\alpha)}{}''(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\,x)}{\prod\limits_{(\alpha)}{}'\vartheta_\alpha}$$

und:

$$\eta = -\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\vartheta_0^2\,\vartheta_2^2\,\vartheta_{34}^2\,\vartheta_{14}^2}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_4}\cdot\frac{y}{(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x)^3}.$$

Wir haben also das Resultat:

Die zu dem Modulsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gehörige Richelot'sche Normalform des Gebildes (1), nämlich:

$$\eta^2 = \xi\,(1-\xi)\,(1-\varkappa^2\,\xi)\,(1-\lambda^2\,\xi)\,(1-\mu^2\,\xi)$$

geht durch die eindeutige Transformation:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{\vartheta_5\,\vartheta_{01}\,\vartheta_{12}}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_4}\cdot\frac{\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}\,x}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x}\\ \eta &= -\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\vartheta_0^2\,\vartheta_2^2\,\vartheta_{34}^2\,\vartheta_{14}^2}{\vartheta_{03}\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{14}}\cdot\frac{y}{(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x)^3}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

über in das Gebilde:

$$y^2 = \frac{4}{\pi^4}\,\frac{\prod\limits_{(\alpha)}{}''(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\,x)}{\prod\limits_{(\alpha)}{}'\vartheta_\alpha}. \tag{19}$$

Dabei ist das Productzeichen $\prod'$ über die zehn geraden, das Zeichen $\prod''$ über die sechs ungeraden ϑ-Indices zu erstrecken.

Durch diese Transformation gehen die beiden zu dem Modulsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} gehörigen Normalintegrale erster Gattung über in:

$$u_1 = \int\frac{dx}{y},\quad u_2 = \int\frac{x\,dx}{y}. \tag{20}$$

Die Normalform (19) ist übrigens, abgesehen von der Bestimmung des constanten Factors, eine unmittelbare Folge einer kürzlich von Herrn Klein in der Abhandlung „Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen" (Mathematische Annalen, Bd. 27) angegebenen Formel. Geht man nämlich von dem Gebilde in der allgemeinen Form (1) aus:

$$Y^2 = A_0 (X - a_0)(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)(X - a_5)$$

und setzt:

$$U_1 = \int \frac{dX}{Y}, \quad U_2 = \int \frac{X\,dX}{Y},$$

so sind U_1 und U_2 im allgemeinen nicht selbst Normalintegrale, sondern homogene lineare Functionen derselben, d. h. von u_1, u_2. Aus Formel (22) der genannten Abhandlung folgt dann:

$$a_\alpha = -\left[\frac{\dfrac{\partial\, \vartheta_\alpha(u_1, u_2)}{\partial U_1}}{\dfrac{\partial\, \vartheta_\alpha(u_1, u_2)}{\partial U_2}}\right]_{U_1 = 0,\ U_2 = 0,}$$

wo ϑ_α eine der sechs ungeraden ϑ-Functionen bedeutet.

Für unser specielles Gebilde $y^2 = R_1(x)$ fallen nun die beiden Integrale U_1, U_2 mit den beiden Normalintegralen u_1, u_2 zusammen, es ist daher:

$$a_\alpha = -\frac{\vartheta_\alpha^{(1)}}{\vartheta_\alpha^{(2)}},$$

und daraus folgt:

$$y^2 = \text{Const.} \prod_{(\alpha)}'' \left(\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\, x\right).$$

Die neue Normalform zeichnet sich durch vollkommene Symmetrie einerseits in Beziehung auf die zehn geraden, andererseits in Beziehung auf die sechs ungeraden ϑ-Functionen aus.

Ferner mögen noch die Gleichungen, welche die Lösung des Umkehrproblems enthalten, ihrer einfachen Form wegen hier Platz finden.

Aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \int_{(\varepsilon_1, 0)}^{(x_1, y_1)} \frac{dx}{y} + \int_{(\varepsilon_2, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{dx}{y} \\ v_2 &= \int_{(\varepsilon_1, 0)}^{(x_1, y_1)} \frac{x\,dx}{y} + \int_{(\varepsilon_2, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{x\,dx}{y} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

wo $\varepsilon_1 = -\dfrac{\vartheta_3^{(1)}}{\vartheta_3^{(2)}}$, $\varepsilon_2 = -\dfrac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$, (entsprechend den unteren Grenzen $\xi_1 = \dfrac{1}{\lambda^2}$, $\xi_2 = 1$ bei Zugrundelegung der Richelot'schen Normalform), folgt durch Umkehrung, wenn zur Abkürzung

$$\vartheta_\alpha^{(1)} + \vartheta_\alpha^{(2)}\, x = \psi(x)_\alpha$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_0}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} &= \frac{\psi(x_1)_{24} \cdot \psi(x_2)_{24}}{\psi(x_1)_{13} \cdot \psi(x_2)_{13}} \\
\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_1}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} &= \frac{\psi(x_1)_3 \quad \psi(x_2)_3}{\psi(x_1)_{13} \quad \psi(x_2)_{13}} \\
\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_2}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} &= -\frac{\psi(x_1)_{04} \quad \psi(x_2)_{04}}{\psi(x_1)_{13} \quad \psi(x_2)_{13}} \\
\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_3}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} &= -\frac{\psi(x_1)_1 \quad \psi(x_2)_1}{\psi(x_1)_{13} \quad \psi(x_2)_{13}} \\
\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_4}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} &= \frac{\psi(x_1)_{02} \quad \psi(x_2)_{02}}{\psi(x_1)_{13} \quad \psi(x_2)_{13}}
\end{aligned}\right\} , \tag{22}$$

Die oben behauptete Einfachheit dieser Formeln besteht darin, dass rechts nur die Linearfactoren von y^2_1 und y^2_2 auftreten und keinerlei constante Factoren.

Die Formeln für die übrigen zehn ϑ-Quotienten nehmen die Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{01}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_0\,\vartheta(v_1, v_2)_1} &= -\frac{\vartheta_{03}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{24}\,\psi(x_1)_3} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{24}\,\psi(x_2)_3}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{02}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_0\,\vartheta(v_1, v_2)_2} &= \frac{\vartheta_4}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{24}\,\psi(x_1)_{04}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{24}\,\psi(x_2)_{04}}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{03}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_0\,\vartheta(v_1, v_2)_3} &= -\frac{\vartheta_{01}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{24}\,\psi(x_1)_{12}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{24}\,\psi(x_2)_1}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{04}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_0\,\vartheta(v_1, v_2)_4} &= -\frac{\vartheta_2}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{24}\,\psi(x_1)_{02}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{24}\,\psi(x_2)_{02}}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{12}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_1\,\vartheta(v_1, v_2)_2} &= \frac{\vartheta_{23}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{04}\,\psi(x_1)_3} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{04}\,\psi(x_2)_3}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{13}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_1\,\vartheta(v_1, v_2)_3} &= -\frac{\vartheta_5}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_3\,\psi(x_1)_1} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_3\,\psi(x_2)_1}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{14}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_1\,\vartheta(v_1, v_2)_4} &= -\frac{\vartheta_{34}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_3\,\psi(x_1)_{02}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_3\,\psi(x_2)_{02}}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{23}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_2\,\vartheta(v_1, v_2)_3} &= -\frac{\vartheta_{12}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{04}\,\psi(x_1)_1} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{04}\,\psi(x_2)_1}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{24}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_2\,\vartheta(v_1, v_2)_4} &= -\frac{\vartheta_0}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_{04}\,\psi(x_1)_{02}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_{04}\,\psi(x_2)_{02}}\right] \\
\frac{\vartheta(v_1, v_2)_{34}\,\vartheta(v_1, v_2)_5}{\vartheta(v_1, v_2)_3\,\vartheta(v_1, v_2)_4} &= -\frac{\vartheta_{14}}{2(x_1 - x_2)}\left[\frac{y_1\,\psi(x_2)_{13}}{\psi(x_1)_1\,\psi(x_1)_{02}} - \frac{y_2\,\psi(x_1)_{13}}{\psi(x_2)_1\,\psi(x_2)_{02}}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Schliesslich soll noch die lineare Transformation unserer Normalform durchgeführt werden. Geht man von dem Modulsystem τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}, zu welchem die Normalform (19) gehört, durch die lineare Periodentransformation (2) zu dem neuen Modulsystem τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} über, so gehört zu diesem Modulsystem die Normalform

$$y'^2 = \frac{4}{\pi^4} \frac{\prod\limits_{(\alpha)}''\left(\theta_\alpha^{(1)} + \theta_\alpha^{(2)} x'\right)}{\prod\limits_{(\alpha)}' \theta_\alpha} \tag{19'}$$

wenn wir für einen Augenblick mit θ die ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$ bezeichnen. Und die beiden zu $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$ gehörigen Normalintegrale erster Gattung u'_1, u'_2 lauten:

$$u'_1 = \int \frac{dx'}{y'}, \qquad u'_2 = \int \frac{x'\,dx'}{y'}.$$

Wie leicht einzusehen, muss x *eine lineare (gebrochene) Function von* x' sein, und zwar wird sich das Resultat ergeben:

$$x = \frac{\omega_{21} + \omega_{22}\,x'}{\omega_{11} + \omega_{12}\,x'}$$

wo $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{22}$ die in (5) angegebene Bedeutung haben.

Beweis: Die Relationen zwischen den transformierten ϑ-Functionen (den θ) und den ursprünglichen haben die Form:

$$\theta(v'_1, v'_2)_\lambda = c_\lambda\, e^{f(v_1, v_2)}\, \vartheta(v_1, v_2)_\mu$$

darin ist c_λ eine vom Index λ abhängige Constante, $f(v_1, v_2)$ eine von λ unabhängige quadratische Form von v_1, v_2; die Indices λ und μ definieren gleichzeitig gerade oder ungerade ϑ-Functionen, und zwischen v_1, v_2 und v'_1, v'_2 bestehen die Relationen:

$$v_1 = \omega_{11}\,v'_1 + \omega_{12}\,v'_2$$
$$v_2 = \omega_{21}\,v'_1 + \omega_{22}\,v'_2,$$

wo die ω wieder die durch (5) definierten Grössen sind. Daraus folgt:

$$\theta_\lambda^{(1)} = c_\lambda\left(\vartheta_\mu^{(1)}\,\omega_{11} + \vartheta_\mu^{(2)}\,\omega_{21}\right)$$
$$\theta_\lambda^{(2)} = c_\lambda\left(\vartheta_\mu^{(1)}\,\omega_{12} + \vartheta_\mu^{(2)}\,\omega_{22}\right)$$

Es ist also:

$$\frac{\prod\limits_{(\lambda)}''\left(\theta_\lambda^{(1)} + \theta_\lambda^{(2)}\,x'\right)}{\prod\limits_{(\lambda)}'\theta_\lambda} = \frac{\prod\limits_{(\lambda)}'' c_\lambda}{\prod\limits_{(\lambda)}' c_\lambda} \cdot \frac{\prod\limits_{(\lambda)}''\left[\vartheta_\lambda^{(1)}\cdot(\omega_{11} + \omega_{12}\,x') + \vartheta_\lambda^{(2)}\cdot(\omega_{21} + \omega_{22}\,x')\right]}{\prod\limits_{(\lambda)}'\vartheta_\lambda}$$

wo die Productzeichen die auf pg. 13 erklärte Bedeutung haben.

Die Theorie der linearen Transformation der ϑ-Functionen[1]) liefert für die Grösse $\dfrac{\prod\limits_{(\lambda)}'' c_\lambda}{\prod\limits_{(\lambda)}' c_\lambda}$ den Wert:

$$\frac{\prod\limits_{(\lambda)}'' c_\lambda}{\prod\limits_{(\lambda)}' c_\lambda} = \frac{1}{(\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21})^2},$$

so dass wir die letzte Gleichung schreiben können:

$$\frac{\prod\limits_{(\lambda)}''\left(\theta_\lambda^{(1)} + \theta_\lambda^{(2)}\,x'\right)}{\prod\limits_{(\lambda)}'\theta_\lambda} = \frac{(\omega_{11} + \omega_{12}\,x')^6}{(\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{22})^2} \cdot \frac{\prod\limits_{(\lambda)}''\left(\vartheta_\lambda^{(1)} + \vartheta_\lambda^{(2)}\cdot\dfrac{\omega_{21} + \omega_{22}\,x'}{\omega_{11} + \omega_{12}\,x'}\right)}{\prod\limits_{(\lambda)}'\vartheta_\lambda}$$

[1]) Siehe Krause, Mathematische Annalen, Bd. 17, pg. 440 und Weber, Borchardt's Journal, Bd. 74, pg. 70.

Und daraus ergiebt sich nach (19) und (19') das Resultat:

Die zum Modulsystem $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ *gehörige Normalform:*

$$y^2 = \frac{4}{\pi^4} \frac{\prod''_{(\lambda)} (\vartheta_\lambda^{(1)} + \vartheta_\lambda^{(2)} x)}{\prod'_{(\lambda)} \vartheta_\lambda}$$

geht durch die eindeutige Transformation:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\omega_{21} + \omega_{22} x'}{\omega_{11} + \omega_{12} x'}, \\ y &= \frac{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}}{(\omega_{11} + \omega_{12} x')^3}\, y' \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

über in die zu dem transformierten Modulsystem $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$ *gehörige Normalform:*

$$y'^2 = \frac{4}{\pi^4} \frac{\prod''_{(\lambda)} (\theta_\lambda^{(1)} + \theta_\lambda^{(2)} x')}{\prod'_{(\lambda)} \theta_\lambda}.$$

Da überdies:

$$dx = \frac{\omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}\,\omega_{21}}{(\omega_{11} + \omega_{12} x')^2}\, dx',$$

so ist:

$$du_1 = \frac{dx}{y} = \frac{(\omega_{11} + \omega_{12} x')\, dx'}{y'} = \omega_{11}\, du'_1 + \omega_{12}\, du'_2$$

$$du_2 = \frac{x\, dx}{y} = \frac{(\omega_{21} + \omega_{22} x')\, dx'}{y'} = \omega_{21}\, du'_1 + \omega_{22}\, du'_2,$$

wie es nach (6) sein muss. —

Das bisherige galt ganz allgemein für beliebige hyperelliptische Gebilde vom Range zwei. Kehren wir jetzt wieder zum Falle der Reducierbarkeit zurück, nehmen also an, dass

$$\tau_{12} = \frac{1}{k},$$

wo k eine positive ganze Zahl ist.

Aus der Voraussetzung, dass die sämmtlichen Wurzeln von $R(X)$ von einander verschieden sind, folgt, dass keiner der Nullwerte der zehn geraden ϑ-Functionen verschwindet[1]). Diese Voraussetzung ist mit der Annahme, dass $\tau_{12} = \frac{1}{k}$ vereinbar; denn, wie man sich aus den Reihenentwicklungen für die ϑ-Functionen überzeugt, verschwindet keiner der Nullwerte der zehn geraden ϑ-Functionen, mit den Moduln $\tau_{11}, \frac{1}{k}, \tau_{22}$ identisch, d. h. für beliebige Werte von τ_{11}, τ_{22}, sobald $k > 1$. (Diese Bemerkung ist wesentlich; denn wenn es unter den zehn Nullwerten einen identisch verschwindenden gäbe, wie dies für $k = 1$ in der That mit ϑ_{23} der

[1]) Wie sich aus den Ausdrücken dieser Nullwerte durch die Wurzeln von $R(X)$ ergibt, welche Herr Thomae im 71. Bande von Borchardt's Journal gegeben hat.

Fall ist, so würde überhaupt kein Gebilde vom Range zwei von der vorausgesetzten Beschaffenheit existieren.) Wir dürfen daher die bisherigen Formeln auf den Fall $\tau_{12} = \frac{1}{k}$ anwenden, ohne befürchten zu müssen, dass einige derselben illusorisch werden.

Es sind dann die Coefficienten von $R_1(x)$ eindeutige Functionen der beiden unabhängigen Parameter τ_{11}, τ_{22} und die beiden Integrale (20) stellen die beiden allgemeinsten Integrale erster Gattung dar, welche durch eine unzerlegbare rationale Transformation $k$ten Grades auf je ein elliptisches Integral reducierbar sind, insofern als jedes Integral erster Gattung, welches durch eine solche Transformation reducierbar ist, durch eine lineare Transformation der Integrationsvariabeln auf eines der beiden Integrale

$$\int \frac{dx}{y} \text{ und } \int \frac{x\,dx}{y}$$

(abgesehen von einem constanten Factor) transformiert werden kann.

Geht man durch eine lineare Periodentransformation zu einem solchen System transformierter ϑ-Moduln über, in welchem

$$\tau'_{12} = \frac{1}{k}$$

also, wie im ersten Abschnitt bewiesen, durch eine kanonische Substitution vom Typus (7a) oder (7b), so sind nach (10a) und (10b) die beiden zu τ'_{11}, $\frac{1}{k}$, τ'_{22} gehörigen Normalintegrale erster Gattung u'_1, u'_2 von u_1, u_2 nur um constante Factoren verschieden und ebenfalls durch Transformationen $k$ten Grades reducierbar. Die Relation (24) zwischen x und x' nimmt in diesem Falle die Form an:

a) für eine kanonische Substitution (7a) wegen $\omega_{12} = 0$, $\omega_{21} = 0$:

$$x = \frac{\omega_{22}}{\omega_{11}} x'. \tag{24a}$$

b) für eine kanonische Substitution (7b) wegen $\omega_{11} = 0$, $\omega_{22} = 0$:

$$x = \frac{\omega_{21}}{\omega_{12}} \cdot \frac{1}{x'}. \tag{24b}$$

Durch Anwendung einer passend gewählten Transformation der ersten Art kann man sich die Darstellung der Constanten des Gebildes (19) durch die Nullwerte elliptischer ϑ-Functionen wesentlich erleichtern, wie unten an dem Beispiele $k = 4$ gezeigt werden wird.

Einen wichtigeren Dienst leisten uns aber die Transformationen der zweiten Art (7b). Hat man nämlich das erste reducierbare Integral u_1 und die zugehörige reducierende rationale Function $k$ten Grades gefunden, so kann man daraus wegen der Gleichungen (10b):

$$du'_1 = \frac{du_2}{\omega_{21}}, \quad du'_2 = \frac{du_1}{\omega_{12}}$$

durch Anwendung einer linearen Transformation vom Typus (7b) durch eine blosse Buchstabenvertauschung das zweite Integral u_2 und die zugehörige Reduction ableiten.

Die einfachste kanonische Substitution dieser Art ist die folgende:

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_2,\ \tilde{\omega}_2 = \omega_1,\ \tilde{\omega}'_1 = \omega'_2,\ \tilde{\omega}'_2 = \omega'_1,$$

für welche

$$\tau'_{11} = \tau_{22},\ \tau'_{12} = \tau_{12},\ \tau'_{22} = \tau_{11}$$

$$du'_1 = du_2,\ du'_2 = du_1;$$

$$x' = \frac{1}{x}.$$

III.

Die Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$ für $k = 4$.

Es soll nunmehr unter Benutzung der bisher gewonnenen Resultate das Reductionsproblem für $k = 4$ vollständig gelöst werden.

Die erste dabei zu lösende Aufgabe ist die folgende:

Aus der transcendenten Bedingung: $\tau_{12} = \frac{1}{k}$ folgt, wie Herr Picard nachgewiesen hat, eine algebraische Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$ als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass es überhaupt unter den zu $\sqrt{R(X)}$ gehörigen Integralen erster Gattung ein durch eine Transformation $k$ten Grades reducierbares gibt. Es handelt sich um die *wirkliche Herstellung dieser algebraischen Relation für $k = 4$.*

Wir schlagen dazu den von Herrn Weierstrass in der bereits citierten Mitteilung von Frau von Kowalevsky[1]) in seinen Grundzügen vorgezeichneten Weg ein.

Darnach haben wir zunächst die ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11},\ \frac{1}{4},\ \tau_{22}$ durch elliptische ϑ-Functionen auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man die Functionen

$$\vartheta(v_1,\ v_2;\ \tau_{11},\ \frac{1}{4},\ \tau_{22})_\lambda$$

durch zweimalige Anwendung der Transformation zweiten Grades[2]):

$$\left\{\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right\}$$

als homogene Functionen vierten Grades der Functionen:

$$\vartheta(v_1,\ v_2;\ 4\tau_{11},\ 1,\ 4\tau_{22})_\lambda$$

ausdrückt, welche in das Product zweier elliptischer ϑ-Functionen zerfallen.

---

[1]) Acta mathematica, Bd. 4, pg. 399.

[2]) In der Bezeichnungsweise von Herrn Hermite.

Die Formeln für die zugehörige Transformation der ϑ-Functionen lauten, wenn man zur Abkürzung

$$\vartheta(v_1, v_2;\ 2\tau_{11},\ 2\tau_{12},\ 2\tau_{22})_\lambda = \theta(v_1, v_2)_\lambda$$ [1]

schreibt:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_5\,\vartheta(v_1, v_2)_5 &= \theta^2(v_1, v_2)_5 + \theta^2(v_1, v_2)_{23} + \theta^2(v_1, v_2)_{01} + \theta^2(v_1, v_2)_4\\
\vartheta_0\,\vartheta(v_1, v_2)_0 &= \theta^2(v_1, v_2)_5 + \theta^2(v_1, v_2)_{23} - \theta^2(v_1, v_2)_{01} - \theta^2(v_1, v_2)_4\\
\vartheta_{12}\,\vartheta(v_1, v_2)_{12} &= \theta^2(v_1, v_2)_5 - \theta^2(v_1, v_2)_{23} - \theta^2(v_1, v_2)_{01} + \theta^2(v_1, v_2)_4\\
\vartheta_{34}\,\vartheta(v_1, v_2)_{34} &= \theta^2(v_1, v_2)_5 - \theta^2(v_1, v_2)_{23} + \theta^2(v_1, v_2)_{01} - \theta^2(v_1, v_2)_4
\end{aligned}\right\}\qquad (25\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_{23}\,\vartheta(v_1, v_2)_{23} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{23}\,\theta(v_1, v_2)_5 + 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_4\\
\vartheta_{14}\,\vartheta(v_1, v_2)_{14} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{23}\,\theta(v_1, v_2)_5 - 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_4\\
\vartheta_4\,\vartheta(v_1, v_2)_4 &= 2\,\theta(v_1, v_2)_4\,\theta(v_1, v_2)_5 + 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_{23}\\
\vartheta_{03}\,\vartheta(v_1, v_2)_{03} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_4\,\theta(v_1, v_2)_5 - 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_{23}\\
\vartheta_{01}\,\vartheta(v_1, v_2)_{01} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_5 + 2\,\theta(v_1, v_2)_4\,\theta(v_1, v_2)_{23}\\
\vartheta_2\,\vartheta(v_1, v_2)_2 &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{01}\,\theta(v_1, v_2)_5 - 2\,\theta(v_1, v_2)_4\,\theta(v_1, v_2)_{23}
\end{aligned}\right\}\qquad (25\text{b})$$

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_{23}\,\vartheta(v_1, v_2)_{24} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_2\,\theta(v_1, v_2)_3 + 2\,\theta(v_1, v_2)_{24}\,\theta(v_1, v_2)_{34}\\
\vartheta_{14}\,\vartheta(v_1, v_2)_{13} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_2\,\theta(v_1, v_2)_3 - 2\,\theta(v_1, v_2)_{24}\,\theta(v_1, v_2)_{34}\\
\vartheta_4\,\vartheta(v_1, v_2)_3 &= 2\,\theta(v_1, v_2)_3\,\theta(v_1, v_2)_{34} + 2\,\theta(v_1, v_2)_2\,\theta(v_1, v_2)_{24}\\
\vartheta_{03}\,\vartheta(v_1, v_2)_{04} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_3\,\theta(v_1, v_2)_{34} - 2\,\theta(v_1, v_2)_2\,\theta(v_1, v_2)_{24}\\
\vartheta_{01}\,\vartheta(v_1, v_2)_{02} &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{12}\,\theta(v_1, v_2)_{02} + 2\,\theta(v_1, v_2)_{13}\,\theta(v_1, v_2)_{03}\\
\vartheta_2\,\vartheta(v_1, v_2)_1 &= 2\,\theta(v_1, v_2)_{12}\,\theta(v_1, v_2)_{02} - 2\,\theta(v_1, v_2)_{13}\,\theta(v_1, v_2)_{03}
\end{aligned}\right\}\qquad (25\text{c})$$

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_5\,\vartheta(v_1, v_2)_0 &= \theta^2(v_1, v_2)_0 + \theta^2(v_1, v_2)_{14} + \theta^2(v_1, v_2)_1 + \theta^2(v_1, v_2)_{04}\\
\vartheta_{12}\,\vartheta(v_1, v_2)_{34} &= \theta^2(v_1, v_2)_0 - \theta^2(v_1, v_2)_{14} - \theta^2(v_1, v_2)_1 + \theta^2(v_1, v_2)_{04}
\end{aligned}\right\}\qquad (25\text{d})$$

Die Formeln (25a) und (25b) sind aus den Formeln, welche Herr **Königsberger** im 64. Bande von Borchardt's Journal, pg. 38 angegeben hat, dadurch abgeleitet, dass auf die beiden Arten von ϑ-Functionen die lineare Transformation:

$$\tilde{\omega}_1 = -\,\omega'_1,\ \tilde{\omega}_2 = -\,\omega'_2,\ \tilde{\omega}'_1 = \omega_1,\ \tilde{\omega}'_2 = \omega_2$$

angewandt wurde, für welche:

$$\tau'_{11} = -\,\frac{\tau_{22}}{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau^2_{12}},\ \tau'_{12} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau^2_{12}},\ \tau'_{22} = -\,\frac{\tau_{11}}{\tau_{11}\,\tau_{22} - \tau^2_{12}}$$

$$v'_1 = \tau'_{11}\,v_1 + \tau'_{21}\,v_2,\quad v'_2 = \tau'_{12}\,v_1 + \tau'_{22}\,v_2.$$

Die Gleichungen (25c) und (25d) folgen aus (25a) und (25b) durch Vermehrung der Argumente um geeignete halbe Perioden.

Aus (25a) und (25b) ergibt sich für die Nullwerte der geraden ϑ-Functionen die Tabelle:

---

[1]) Das Zeichen θ hat also hier eine andere Bedeutung als gelegentlich oben pg. 17.

$$\left.\begin{array}{ll}
\vartheta_5^2 = \theta_5^2 + \theta_{23}^2 + \theta_{01}^2 + \theta_4^2, & \vartheta_{12}^2 = \theta_5^2 - \theta_{23}^2 - \theta_{01}^2 + \theta_4^2 \\
\vartheta_0^2 = \theta_5^2 + \theta_{23}^2 - \theta_{01}^2 - \theta_4^2, & \vartheta_{34}^2 = \theta_5^2 - \theta_{23}^2 + \theta_{01}^2 - \theta_4^2 \\
\vartheta_{23}^2 = 2\,\theta_{23}\,\theta_5 + 2\,\theta_{01}\,\theta_4, & \vartheta_{14}^2 = 2\,\theta_{23}\,\theta_5 - 2\,\theta_{01}\,\theta_4 \\
\vartheta_4^2 = 2\,\theta_4\,\theta_5 + 2\,\theta_{01}\,\theta_{23}, & \vartheta_{03}^2 = 2\,\theta_4\,\theta_5 - 2\,\theta_{01}\,\theta_{23} \\
\vartheta_{01}^2 = 2\,\theta_{01}\,\theta_5 + 2\,\theta_4\,\theta_{23}, & \vartheta_2^2 = 2\,\theta_{01}\,\theta_5 - 2\,\theta_4\,\theta_{23}\,{}^{1)}
\end{array}\right\} \qquad (26)$$

Wir geben jetzt in diesen Formeln dem τ_{12} wieder den Wert $\frac{1}{4}$ und verstehen im Folgenden unter $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ speciell die ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{11}, \frac{1}{4}, \tau_{22}$, unter $\theta(v_1\, v_2)_\lambda$ diejenigen mit den Moduln $2\,\tau_{11}, \frac{1}{2}, 2\,\tau_{22}$.

Bezeichnen wir weiter

$$\vartheta(v_1, v_2;\ 4\,\tau_{11},\ 1,\ 4\,\tau_{22})_\lambda = \varphi(v_1, v_2)_\lambda$$

und mit φ_λ wieder die Nullwerte, so erhalten wir die Grössen θ_λ^2 durch die Grössen φ_λ ausgedrückt mittels derselben Formeln (26), wenn wir darin ϑ_λ durch θ_λ, θ_λ durch φ_λ ersetzen.

Die Functionen $\varphi(v_1, v_2)_\lambda$ zerfallen in das Product aus zwei elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln $4\,\tau_{11}$ und $4\,\tau_{22}$ nach der aus der Definition der ϑ-Functionen folgenden Identität:

$$\vartheta(v_1, v_2;\ \tau_{11},\ 1,\ \tau_{22})_{\overset{\lambda}{m_1}\overset{\lambda}{m_2}\overset{\lambda}{n_1}\overset{\lambda}{n_2}} = e^{-\frac{\pi i}{2}\overset{\lambda}{n_1}\overset{\lambda}{n_2}}\ \vartheta(v_1 \mid \tau_{11})_{\overset{\lambda}{m_1}+\overset{\lambda}{n_2},\,\overset{\lambda}{n_1}} \cdot \vartheta(v_2 \mid \tau_{22})_{\overset{\lambda}{m_2}+\overset{\lambda}{n_1},\,\overset{\lambda}{n_2}} \qquad (27)$$

aus welcher sich die Tabelle ergibt:

$$\left.\begin{array}{ll}
\varphi_5 = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_3\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_3, & \varphi_0 = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_0\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_0 \\
\varphi_2 = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_2\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_3, & \varphi_4 = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_0\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_2 \\
\varphi_{01} = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_2\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_0, & \varphi_{03} = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_3\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_2 \\
\varphi_{12} = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_0\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_3, & \varphi_{14} = -\,i\,\vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_2\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_2 \\
\varphi_{23} = 0, & \varphi_{34} = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_3\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_0
\end{array}\right\} \qquad (28)$$

Hiernach erhält man die Grössen θ_λ^2 folgendermassen durch die Nullwerte elliptischer ϑ-Functionen ausgedrückt:

Setzt man zur Abkürzung:

$$l = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_3\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_3,\quad m = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_2\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_0,\quad n = \vartheta(0 \mid 4\tau_{11})_0\, \vartheta(0 \mid 4\tau_{22})_2$$

so ist

$$\left.\begin{array}{c}
\theta_5^2 = l^2 + m^2 + n^2; \quad \theta_0^2 = l^2 - m^2 - n^2 \\
\theta_{12}^2 = l^2 - m^2 + n^2; \quad \theta_{34}^2 = l^2 + m^2 - n^2 \\
\theta_{23}^2 = 2\,mn = -\,\theta_{14}^2 \\
\theta_4^2 = 2\,nl = \theta_{03}^2 \\
\theta_2^2 = 2\,lm = \theta_{01}^2
\end{array}\right\} \qquad (29)$$

---

[1]) Diese Formeln (26) hätten wir direct aus den Gleichungen von Göpel entnehmen können (cf. Rohn, Mathematische Annalen, Bd. 15, p. 330), durch welche die Quadrate der Functionen $\vartheta(v_1, v_2)_\lambda$ als lineare Func-

Die Gleichungen (26) und (29) zusammen liefern also die Nullwerte der ϑ-Functionen mit den Moduln τ_{11}, $\frac{1}{4}$, τ_{22} algebraisch ausgedrückt durch die Nullwerte der elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln $4\tau_{11}$ und $4\tau_{22}$. —

Nachdem so das erforderliche Formelmaterial zusammengestellt ist, ergibt sich die Lösung unserer Aufgabe auf folgendem Wege:

Wenn es unter den zum Gebilde (1) gehörigen Integralen erster Gattung eines gibt, welches durch eine Transformation vierten Grades reducierbar ist, so lässt sich jedes aus vier Wurzeln von $R(X)$ gebildete Doppelverhältniss durch Nullwerte von ϑ-Functionen mit den Moduln τ_{11}, $\frac{1}{4}$, τ_{22} darstellen in der Form:

$$Q = \pm \frac{\vartheta_\lambda^2 \vartheta_\mu^2}{\vartheta_\nu^2 \vartheta_\varrho^2},$$

wo (λ), (μ), (ν), (ϱ) ein Göpel'sches Quadrupel aus geraden ϑ-Indices bilden.

Mit Hilfe der Gleichungen (26) und (29) ergibt sich Q als algebraische Function der beiden Quotienten $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$.

Greift man jetzt irgend drei von einander unabhängige Doppelverhältnisse heraus, drückt dieselben durch $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ aus und eliminiert diese beiden Grössen aus den drei so entstehenden Gleichungen, so erhält man die gesuchte Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$.

Von der Wahl der dabei benutzten Doppelverhältnisse hängt die Einfachheit der durchzuführenden Rechnung ab.

Legt man dieselbe Reihenfolge der Wurzeln von $R(X)$ zu Grunde, wie oben bei Ableitung der Gleichung (12) so erweisen sich die drei folgenden Doppelverhältnisse als besonders geeignet:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2} = \frac{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)}{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)} = \frac{\vartheta_{12}^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2 \vartheta_5^2} \\ q &= \mu_1^2 = \frac{(a_4 - a_5)(a_3 - a_0)}{(a_4 - a_0)(a_3 - a_5)} = \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2} \\ r &= \frac{\varkappa^2 \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \mu_\varkappa^2} = \frac{(a_1 - a_0)(a_2 - a_5)}{(a_1 - a_5)(a_2 - a_0)} = \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_{12}^2}{\vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wobei nach Rosenhain[1]):

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 &= \frac{\vartheta_2 \vartheta_{34}}{\vartheta_{01} \vartheta_5}, \quad \lambda_1 = \frac{\vartheta_0 \vartheta_2}{\vartheta_{12} \vartheta_{01}}, \quad \mu_1 = \frac{\vartheta_0 \vartheta_{34}}{\vartheta_{12} \vartheta_5} \\ \lambda_\varkappa &= \frac{\vartheta_{14} \vartheta_2 \vartheta_{23}}{\vartheta_{12} \vartheta_{01} \vartheta_5}, \quad \mu_\varkappa = \frac{\vartheta_{14} \vartheta_{34} \vartheta_4}{\vartheta_{12} \vartheta_{01} \vartheta_5}, \quad \mu_\lambda = \frac{\vartheta_{14} \vartheta_0 \vartheta_{03}}{\vartheta_{12} \vartheta_{01} \vartheta_5} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

---

tionen von vier Functionen $\theta(2v_1, 2v_2)_\lambda$ ausgedrückt werden. Da wir jedoch später auch die Nullwerte der partiellen Ableitungen der ungeraden ϑ-Functionen brauchen werden, und da hierfür die Göpel'schen Formeln nicht ausreichen, so habe ich gleich hier die vollständige Tabelle für die Transformation gegeben.

[1]) a. a. O. pg. 417.

q geht aus p hervor durch Anwendung der Substitution:

$$\sigma = (a_1, a_3, a_5)\ (a_2, a_4, a_0);$$

r aus p durch die Substitution σ^2.

Die drei Doppelverhältnisse p, q, r sind von einander unabhängig, d. h. es kann zwischen ihnen keine für beliebige $a_0, a_1, \ldots a_5$ giltige Relation bestehen. Ferner kann keines derselben einen der Werte 0, 1, ∞ annehmen, weil nach Voraussetzung das Gebilde (1) vom Range 2 ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (26) und (29) erhält man nach einer einfachen Rechnung, bei welcher man auf die zwischen den Nullwerten der ϑ-Functionen bestehenden Rosenhain'-schen Relationen Rücksicht zu nehmen hat, für p, q, r die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} p &= \left[\frac{m^2 + n^2 - l^2 - 2\,mn}{m^2 + n^2 - l^2 + 2\,mn}\right]^2 \\ q &= \left[\frac{n^2 + l^2 - m^2 - 2\,nl}{n^2 + l^2 - m^2 + 2\,nl}\right]^2 \\ r &= \left[\frac{l^2 + m^2 - n^2 - 2\,lm}{l^2 + m^2 - n^2 + 2\,lm}\right]^2 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}-1} = f, \quad \frac{\sqrt{q}+1}{\sqrt{q}-1} = g, \quad \frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1} = h,$$

dass es eine Combination der Vorzeichen der Quadratenwurzeln $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ geben muss, für welche:

$$\begin{aligned} l\,(l + hm + gn) &= 0 \\ m\,(hl + m + fn) &= 0 \\ n\,(gl + fm + n) &= 0. \end{aligned}$$

Nun kann keine der drei Grössen l, m, n gleich 0 sein; denn τ_{11} und τ_{22} sind endliche und von Null verschiedene Grössen, deren imaginäre Teile positiv sind; daraus folgt aber, dass keiner der Nullwerte:

$$\vartheta\,(0 \mid 4\tau_{11})_\lambda \quad \text{und} \quad \vartheta\,(0 \mid 4\tau_{22})_\lambda$$

verschwinden kann, also auch keine der Grössen l, m, n.

Es folgt also aus den drei letzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} l + hm + gn &= 0 \\ hl + m + fn &= 0 \\ gl + fm + n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

und hieraus weiter, dass:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & g \\ h & 1 & f \\ g & f & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (34)$$

sein muss.

Dies ist die gesuchte algebraische Relation zwischen den Wurzeln von $R(X)$; die Gleichung (34) ist nicht etwa eine für beliebige Werte von $a_0, a_1 \dots a_5$ giltige Identität, da die Grössen f, g, h ebenso wie p, q, r von einander unabhängig sind.

Zunächst ist von der Bedingung (34) nur gezeigt, dass sie *notwendig* ist; sie ist aber auch *hinreichend*.

Beweis:

Angenommen zwischen den Wurzeln von $R(X)$, welche alle von einander verschieden vorausgesetzt werden, bestehe für irgend eine Combination der Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ die Gleichung (34). Dann kann keine der Grössen $f^2, g^2, h^2 = 1$ sein, weil hieraus folgen würde, dass eines der Doppelverhältnisse p, q, r einen der Werte 1 oder ∞ annehmen würde. Man kann also die beiden letzten der Gleichungen (33) nach $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ auflösen; die erste ist dann in Folge von (34) von selbst miterfüllt. Man erhält für $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ bestimmte, endliche Werte, welche beide $\gtrless 0$; denn wäre z. B. $\frac{m}{l} = 0$, so müsste $h = fg$ sein, und dies in (34) eingesetzt gibt:

$$(1 - f^2)(1 - g^2) = 0,$$

was nicht möglich ist; ebensowenig kann $\frac{n}{l} = 0$ sein.

Daraus, dass die so erhaltenen Werte von $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ endlich und von Null verschieden sind, lässt sich aber leicht zeigen[1]): Es ist stets (und auf mannigfaltige Weise) möglich zwei endliche und von Null verschiedene Grössen τ_1 und τ_2, deren imaginäre Teile positiv sind, so zu bestimmen, dass:

$$\frac{m}{l} = \frac{\vartheta(0 \mid \tau_1)_2 \, \vartheta(0 \mid \tau_2)_0}{\vartheta(0 \mid \tau_1)_3 \, \vartheta(0 \mid \tau_2)_3}, \quad \frac{n}{l} = \frac{\vartheta(0 \mid \tau_1)_0 \, \vartheta(0 \mid \tau_2)_2}{\vartheta(0 \mid \tau_1)_3 \, \vartheta(0 \mid \tau_2)_3}.$$

Bestimmt man dann die beiden Grössen τ_{11}, τ_{22} durch:

$$\tau_{11} = \frac{\tau_1}{4}, \quad \tau_{22} = \frac{\tau_2}{4},$$

so convergieren die ϑ-Reihen mit den Moduln:

$$\tau_{11}, \quad \frac{1}{4}, \quad \tau_{22},$$

und die Beziehung zwischen diesen ϑ-Functionen und den elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln τ_1 und τ_2 wird durch die Gleichungen (26) und (29) vermittelt.

Da überdies die Gleichungen (32) aus (33) folgen, so erhält man, wenn man in (32) die Ausdrücke von $\frac{m}{l}$, $\frac{n}{l}$ durch Nullwerte elliptischer ϑ-Functionen einsetzt, mit Hilfe von (26) und (29):

---

[1]) Mit Hilfe von Art. 40 und 41 der „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen, herausgegeben von H. A. Schwarz“, und Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen II, pg. 66, Transformationsclasse I.

$$p = \frac{\vartheta_{12}^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_0^2 \vartheta_5^2}, \quad q = \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_{34}^2}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2}, \quad r = \frac{\vartheta_0^2 \vartheta_{12}^2}{\vartheta_{34}^2 \vartheta_5^2}.$$

Löst man jetzt die Gleichungen:

$$p = \frac{\varkappa_1^2}{\lambda_1^2}, \quad q = \mu_1^2, \quad r = \frac{\varkappa^2 \mu_\lambda^2}{\lambda^2 \mu_\varkappa^2}$$

nach $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 auf, so erhält man, unter beständiger Berücksichtigung der Rosenhain'schen Relationen: es muss
entweder:

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 \vartheta_4^2}{\vartheta_{01}^2 \vartheta_5^2}, \quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_{03}^2 \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_{01}^2}, \quad \mu^2 = \frac{\vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2}$$

oder:

$$\varkappa^2 = -\frac{\vartheta_{14}^2 \vartheta_{03}^2}{\vartheta_2^2 \vartheta_5^2}, \quad \lambda^2 = -\frac{\vartheta_{14}^2 \vartheta_4^2}{\vartheta_2^2 \vartheta_{12}^2}, \quad \mu^2 = \frac{\vartheta_{03}^2 \vartheta_4^2}{\vartheta_{12}^2 \vartheta_5^2}$$

sein.

Im ersten Falle ergibt sich unmittelbar nach Rosenhain[1]), dass das auf die angegebene Weise bestimmte System

$$\tau_{11}, \ \frac{1}{4}, \ \tau_{22}$$

wirklich ein zu dem Gebilde (1) gehöriges Modulsystem ist.

Im zweiten Falle gelangt man durch Anwendung der linearen Transformation:

$$\bar{\omega}'_1 = \omega'_1 + \omega_2, \ \bar{\omega}'_2 = \omega'_2 + \omega_1, \ \bar{\omega}_1 = \omega_1, \ \bar{\omega}_2 = \omega_2$$

für welche:

$$\tau'_{11} = \tau_{11}, \ \tau'_{12} = \tau_{12} + 1, \ \tau'_{22} = \tau_{22}$$
$$v'_1 = v_1, \ v'_2 = v_2$$

$$\vartheta(v'_1, v'_2; \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})_{\underset{m_1}{\lambda} \underset{m_2}{\lambda} \underset{n_1}{\lambda} \underset{n_2}{\lambda}} = i^{-\underset{n_1}{\lambda}\underset{n_2}{\lambda}} \vartheta(v_1, v_2; \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_{\underset{m_1}{\lambda} + \underset{n_2}{\lambda}, \underset{m_2}{\lambda} + \underset{n_1}{\lambda}, \underset{n_1}{\lambda}, \underset{n_2}{\lambda}}$$

zunächst zu dem Resultat, dass:

$$\tau_{11}, \ \frac{5}{4}, \ \tau_{22}$$

ein zum Gebilde (1) gehöriges Modulsystem ist, und hieraus folgt mit Hilfe der inversen linearen Transformation, dass auch

$$\tau_{11}, \ \frac{1}{4}, \ \tau_{22}$$

selbst ein solches ist.

Wenn also zwischen den Wurzeln von $R(X)$ die Relation (34) besteht, so gibt es unter den unendlich vielen zum Gebilde (1) gehörigen Systemen von ϑ-Moduln mindestens eines, in welchem $\tau_{12} = \frac{1}{4}$; und damit ist nach den Resultaten von Herrn Picard bewiesen, dass die Bedingung (34) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend ist.

[1]) a. a. O. pg. 435.

Wir können also das Resultat aussprechen:

Soll es unter den zu dem Gebilde:

$$Y^2 = A_0 (X - a_0)(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)(X - a_5)$$

gehörigen Integralen erster Gattung eines geben, welches durch eine unzerlegbare Transformation vierten Grades auf ein elliptisches reducierbar ist, so ist notwendig und hinreichend, dass die Reihenfolge der Wurzeln $a_0 \dots a_5$ sich so wählen lässt, dass zwischen denselben die Relation besteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & h & g \\ h & 1 & f \\ g & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

darin ist:

$$f = \frac{\sqrt{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} + \sqrt{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)}}{\sqrt{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)} - \sqrt{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)}}$$

und g und h gehen aus f hervor durch Anwendung der Substitution:

$$\sigma = (a_1, a_3, a_5)(a_2, a_4, a_0)$$

resp. σ^2. — Der Versuch, aus dieser Bedingung eine rationale Relation zwischen den Coefficienten von $R(X)$ herzuleiten, führt auf Rechnungen von abschreckender Complicierheit.

IV.

Darstellung der Constanten der beiden reducierbaren Integrale als algebraische Functionen zweier Parameter für $k = 4$.

Unsere nächste Aufgabe ist nun, die beiden reducierbaren Integrale selbst anzugeben. Wir legen die Normalform (19) zu Grunde, dann werden dieselben durch die Gleichungen (20) dargestellt, wenn in den darin vorkommenden Nullwerten der ϑ-Functionen und ihrer Ableitungen $\tau_{12} = \frac{1}{4}$ gesetzt wird. Wir haben nun die Constanten des Gebildes (19) durch die Nullwerte elliptischer ϑ-Functionen auszudrücken, woraus sich eine *Darstellung jener Constanten als algebraische Functionen von zwei unabhängigen Parametern* ergeben wird. Ausser den Formeln (26) und (29) brauchen wir dazu noch die entsprechenden Formeln für die Nullwerte der Ableitungen der ungeraden ϑ-Functionen. Nach (25c) findet man

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{23}\, \vartheta_{24}^{(\nu)} &= 2\,\theta_{34}\, \theta_{24}^{(\nu)} + 2\,\theta_2\, \theta_3^{(\nu)}; & \vartheta_{14}\, \vartheta_{13}^{(\nu)} &= 2\,\theta_2\, \theta_3^{(\nu)} - 2\,\theta_{34}\, \theta_{24}^{(\nu)} \\ \vartheta_4\, \vartheta_3^{(\nu)} &= 2\,\theta_{34}\, \theta_3^{(\nu)} + 2\,\theta_2\, \theta_{24}^{(\nu)}; & \vartheta_{03}\, \vartheta_{04}^{(\nu)} &= 2\,\theta_{34}\, \theta_3^{(\nu)} - 2\,\theta_2\, \theta_{24}^{(\nu)} \\ \vartheta_{01}\, \vartheta_{02}^{(\nu)} &= 2\,\theta_{12}\, \theta_{02}^{(\nu)} + 2\,\theta_{03}\, \theta_{13}^{(\nu)}; & \vartheta_2\, \vartheta_1^{(\nu)} &= 2\,\theta_{12}\, \theta_{02}^{(\nu)} - 2\,\theta_{03}\, \theta_{13}^{(\nu)} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

für $\nu = 1,2$

Aus (25d) folgt die für eine Vorzeichenbestimmung nöthige Formel:

$$\vartheta_5\,\vartheta_0 = \theta_0^2 + \theta_{14}^2; \quad \vartheta_{12}\,\vartheta_{34} = \theta_0^2 - \theta_{14}^2.$$

Berücksichtigt man ferner die bekannte Relation:

$$\vartheta'(0 \mid \tau)_1 = \pi\,\vartheta(0 \mid \tau)_0\,\vartheta(0 \mid \tau)_2\,\vartheta(0 \mid \tau)_3$$

so erhält man als Ergänzung zu den Gleichungen (29) die folgenden:

$$\left.\begin{array}{ll}
\theta_{13}^{(1)} = \pi i\,\theta_{14}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_3; & \theta_{13}^{(2)} = -\pi\,\theta_{14}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_3 \\
\theta_{24}^{(1)} = \pi i\,\theta_{23}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_3; & \theta_{24}^{(2)} = \pi\,\theta_{23}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_3 \\
\theta_{3}^{(1)} = \pi i\,\theta_{4}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_2; & \theta_{3}^{(2)} = \pi\,\theta_{4}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_0 \\
\theta_{04}^{(1)} = -\pi i\,\theta_{03}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_2; & \theta_{04}^{(2)} = \pi\,\theta_{03}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_0 \\
\theta_{1}^{(1)} = \pi\,\theta_{2}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_0; & \theta_{1}^{(2)} = -\pi i\,\theta_{2}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_2 \\
\theta_{02}^{(1)} = \pi\,\theta_{01}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_0; & \theta_{02}^{(2)} = \pi i\,\theta_{01}\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_2
\end{array}\right\} \qquad (36)$$

wo wieder

$$\tau_1 = 4\tau_{11},\ \tau_2 = 4\tau_{22}.$$

Die zu dem Modulsystem

$$\tau_{11},\ \frac{1}{4},\ \tau_{22}$$

gehörige Normalform (19) lautet:

$$y^2 = \frac{4}{\pi^4}\,\frac{\prod\limits_{(\lambda)}'' \left(\vartheta_\lambda^{(1)} + \vartheta_\lambda^{(2)} x\right)}{\prod\limits_{(\lambda)}' \vartheta_\lambda}$$

mit der auf pg. 14 angegebenen Bedeutung der Productzeichen.

Hierin haben wir die Nullwerte der elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln τ_1 und τ_2 mit Hilfe von (26), (29), (35) und (36) einzuführen. Der Anblick dieser Gleichungen legt es nahe, bei der Berechnung von y^2 die Factoren folgendermassen in Gruppen zusammenzufassen:

$$\frac{1}{\vartheta_5\,\vartheta_0\,\vartheta_{12}\,\vartheta_{34}} \cdot \frac{\left(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)} x\right)\left(\vartheta_{24}^{(1)} + \vartheta_{24}^{(2)} x\right)}{\vartheta_{14}\,\vartheta_{23}} \cdot \frac{\left(\vartheta_{3}^{(1)} + \vartheta_{3}^{(2)} x\right)\left(\vartheta_{04}^{(1)} + \vartheta_{04}^{(2)} x\right)}{\vartheta_{4}\,\vartheta_{03}} \cdot \frac{\left(\vartheta_{1}^{(1)} + \vartheta_{1}^{(2)} x\right)\left(\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)} x\right)}{\vartheta_{2}\,\vartheta_{01}}.$$

Um Symmetrie in die Rechnung zu bringen, führen wir statt der Nullwerte der elliptischen ϑ-Functionen folgende Grössen ein:

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha = -i\,\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_3, & \alpha' = i\,\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_3 \\
\beta = \vartheta^2(0 \mid \tau_1)_2, & \beta' = \vartheta^2(0 \mid \tau_2)_0 \\
\gamma = \vartheta^2(0 \mid \tau_1)_0, & \gamma' = \vartheta^2(0 \mid \tau_2)_2
\end{array}\right\} \qquad (37)$$

Zwischen diesen Grössen bestehen dann wegen der bekannten Relation:

$$\vartheta^4(0 \mid \tau)_3 = \vartheta^4(0 \mid \tau)_0 + \vartheta^4(0 \mid \tau)_2$$

die beiden Gleichungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0. \qquad (38)$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} A &= \beta\beta' + \gamma\gamma' - \alpha\alpha' \ (= -\theta_0^2) \\ B &= \gamma\gamma' + \alpha\alpha' - \beta\beta' \ (= \theta_{12}^2) \\ C &= \alpha\alpha' + \beta\beta' - \gamma\gamma' \ (= \theta_{34}^2) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

dann ist das Resultat der Rechnung folgendes:

Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} U &= (\beta^2 B - \gamma^2 C) - 2\,i A\alpha\alpha' x - (\beta'^2 B - \gamma'^2 C)\,x^2 \\ V &= (\gamma^2 C - \alpha^2 A) - 2\,i B\beta\beta' x - (\gamma'^2 C - \alpha'^2 A)\,x^2 \\ W &= (\alpha^2 A - \beta^2 B) - 2\,i C\gamma\gamma' x - (\alpha'^2 A - \beta'^2 B)\,x^2 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

so ist:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)} x)(\vartheta_{24}^{(1)} + \vartheta_{24}^{(2)} x)}{\vartheta_{23}\vartheta_{14}} &= \frac{\pi^2 U}{A} \\ \frac{(\vartheta_{3}^{(1)} + \vartheta_{3}^{(2)} x)(\vartheta_{04}^{(1)} + \vartheta_{04}^{(2)} x)}{\vartheta_{4}\vartheta_{03}} &= \frac{\pi^2 V}{B} \\ \frac{(\vartheta_{1}^{(1)} + \vartheta_{1}^{(2)} x)(\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)} x)}{\vartheta_{2}\vartheta_{01}} &= \frac{\pi^2 W}{C} \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

und endlich:

$$\vartheta_5\,\vartheta_0\,\vartheta_{12}\,\vartheta_{34} = -(BC + CA + AB), \tag{42}$$

so dass *das zu dem Modulsystem* τ_{11}, $\frac{1}{4}$, τ_{22} *gehörige Gebilde* (*19*) *lautet:*

$$y^2 = \frac{4\pi^2}{ABC(BC + CA + AB)} \cdot UVW \tag{43}$$

und die beiden zugehörigen Normalintegrale erster Gattung:

$$u_1 = \int \frac{dx}{y} \quad \textit{und} \quad u_2 = \int \frac{x\,dx}{y}$$

sind dann durch rationale Transformationen vierten Grades auf elliptische Integrale reducierbar.

Der Anblick der Gleichungen (40) lehrt einige Eigenschaften der Functionen U, V, W, welche sich auch a priori mit Hilfe der im ersten Abschnitt betrachteten linearen Periodentransformationen beweisen lassen, und durch welche die Ausführung der Rechnung wesentlich erleichtert wird.

1. *V geht aus U hervor durch gleichzeitige cyclische Vertauschung von α, β, γ und α', β', γ'; auf dieselbe Weise geht W aus V hervor.*

Dass sich dies so verhalten *muss*, erkennt man a priori durch Anwendung der zum Typus (7a) gehörigen kanonischen Substitution von der Determinante 1:

$$\left\{\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right\} \tag{44}$$

für welche nach (9a), (10a) und (24a), wenn $4\tau'_{11} = \tau'_1$, $4\tau'_{22} = \tau'_2$ gesetzt wird:

$$\tau'_1 = \frac{\tau_1 + 1}{\tau_1 + 2}, \qquad \tau'_2 = \frac{2\tau_2 + 1}{\tau_2 + 1}$$

$$u'_1 = \frac{u_1}{\tau_1 + 2}, \qquad u'_2 = \frac{u_2}{\tau_2 + 1}, \qquad x' = \frac{\tau_1 + 2}{\tau_2 + 1}\, x.$$

Die zugehörigen Formeln für die Transformation der ϑ-Functionen lauten, wenn man die zum Modulsystem τ'_{11}, $\frac{1}{4}$, τ'_{22} gehörigen ϑ-Functionen durch Ueberstreichen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \bar\vartheta_{13}(u'_1, u'_2) &= -E \cdot \vartheta(u_1, u_2)_3; & \bar\vartheta_{24}(u'_1, u'_2) &= -E\,\vartheta(u_1, u_2)_{04} \\ \bar\vartheta(u'_1, u'_2)_{23} &= E \cdot \vartheta(u_1, u_2)_4; & \bar\vartheta_{14}(u'_1, u'_2) &= -E\,\vartheta(u_1, u_2)_{03} \end{aligned}$$

wo E ein allen ϑ-Functionen gemeinsamer Exponentialfactor ist.

Daraus folgt, dass

$$-\frac{\left(\bar\vartheta^{(1)}_{13} + \bar\vartheta^{(2)}_{13} x'\right)\left(\bar\vartheta^{(1)}_{24} + \bar\vartheta^{(2)}_{24} x'\right)}{\bar\vartheta_{14}\,\bar\vartheta_{23}} = (\tau_1 + 2)^2 \frac{\left(\vartheta^{(1)}_{13} + \vartheta^{(2)}_{13} x\right)\left(\vartheta^{(1)}_{04} + \vartheta^{(2)}_{04} x\right)}{\vartheta_4\,\vartheta_{03}}$$

Um andererseits zu sehen, was aus der Function U wird, wenn man τ_1 durch τ'_1, τ_2 durch τ'_2 ersetzt, hat man nach den bekannten Formeln[1]) die Nullwerte der elliptischen ϑ-Functionen mit den Moduln τ'_1 resp. τ'_2 durch die mit den Moduln τ_1 resp. τ_2 auszudrücken, was nach einer auf pg. 10 gemachten Bemerkung möglich ist. Bezeichnet man die zu den Moduln τ'_1, τ'_2 gehörigen Werte der durch (37) und (39) definierten Grössen α, β, γ; α', β' γ'; A, B, C ebenfalls durch Ueberstreichen, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \bar\alpha &= (\tau_1 + 2)\,\beta, & \bar\alpha &= (\tau_2 + 1)\,\beta', & \bar A &= (\tau_1 + 2)(\tau_2 + 1)\,B \\ \bar\beta &= (\tau_1 + 2)\,\gamma, & \bar\beta' &= (\tau_2 + 1)\,\gamma', & \bar B &= (\tau_1 + 2)(\tau_2 + 1)\,C \\ \bar\gamma &= (\tau_1 + 2)\,\alpha, & \bar\gamma' &= (\tau_2 + 1)\,\alpha', & \bar C &= (\tau_1 + 2)(\tau_2 + 1)\,A \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

und daraus folgt:

$$\frac{\pi^2\,\bar U(x')}{\bar A} = \pi^2 (\tau_1 + 2)^2 \frac{V(x)}{B}$$

Man erhält also durch Anwendung der linearen Transformation (44) auf die erste der Gleichungen (41) die zweite Gleichung, und die Gleichungen (45) zeigen, dass dieser Uebergang mit der oben angegebenen cyclischen Permutation identisch ist.

Auf dieselbe Weise geht durch Anwendung der Transformation (44) die dritte der Gleichungen (41) aus der zweiten hervor.

2. *Vertauscht man in U gleichzeitig α mit α', β mit β', γ mit γ', ersetzt x durch $-\frac{1}{x}$ und multipliciert schliesslich mit x^2, so geht U in $-U$ über.*

Auch diese Eigenschaft lässt sich a priori beweisen mit Hilfe der zum Typus (7b) gehörigen kanonischen Substitution von der Determinante 1:

[1]) Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, II, pg. 67, Transformationsclasse IV und VI.

$$\left\{\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 12 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right\} \tag{46}$$

für welche nach (9b), (10b) und (24b):

$$\tau'_1 = \frac{3 - 2\tau_2}{\tau_2 - 2}, \quad \tau'_2 = \frac{1 - 2\tau_1}{3\tau_1 - 2}$$

$$u'_1 = \frac{u_2}{\tau_2 - 2}, \quad u'_2 = \frac{u_1}{3\tau_1 - 2}$$

$$x' = \frac{\tau_2 - 2}{3\tau_1 - 2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Die Formeln für die zugehörige Transformation der ϑ-Functionen lauten:

$$\bar{\vartheta}(u'_1, u'_2)_{13} = E\,\vartheta(u_1, u_2)_{13}; \qquad \bar{\vartheta}(u'_1, u'_2)_{24} = -\,E\,\vartheta(u_1, u_2)_{24}$$

$$\bar{\vartheta}(u'_1, u'_2)_{14} = -\,E\,\vartheta(u_1, u_2)_{14}; \qquad \bar{\vartheta}(u'_1, u'_2)_{23} = E\,\vartheta(u_1, u_2)_{23}.$$

Ferner ist nach den Formeln für die Transformation der elliptischen ϑ-Functionen:

$$\bar{\alpha} = i(\tau_2 - 2)\,\alpha'; \quad \bar{\alpha}' = -\,i(3\tau_1 - 2)\,\alpha$$

$$\bar{\beta} = i(\tau_2 - 2)\,\beta'; \quad \bar{\beta}' = -\,i(3\tau_1 - 2)\,\beta$$

$$\bar{\gamma} = i(\tau_2 - 2)\,\gamma'; \quad \bar{\gamma}' = -\,i(3\tau_1 - 2)\,\gamma.$$

Und hieraus ergibt sich ohne Schwierigkeit die oben hervorgehobene Eigenschaft der Function U.

Kennt man a priori die beiden angegebenen Eigenschaften der Functionen U, V, W, so braucht man von den 9 Coefficienten derselben nur zwei wirklich zu berechnen, die übrigen ergeben sich daraus durch einfache Buchstabenvertauschung.

Um die Constanten der beiden reducierbaren Integrale als algebraische Functionen von zwei unabhängigen Parametern ausgedrückt zu erhalten, braucht man in den Gleichungen (43) nur zu setzen:

$$x = -\,\frac{\alpha}{\alpha'}\,t.$$

Man kann dann die Constanten der beiden Integrale (abgesehen von einem vor das Integral tretenden constanten Factor) rational ausdrücken durch die Grössen:

$$c = \frac{\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_2}{\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_3}, \quad c' = \frac{\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_0}{\vartheta^2(0 \mid \tau_1)_3}$$

$$e = \frac{\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_2}{\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_3}, \quad e' = \frac{\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_0}{\vartheta^2(0 \mid \tau_2)_3}$$

d. h. durch die Moduln der beiden elliptischen Integrale, auf welche u_1 und u_2 reducierbar sind, und durch deren Complemente.

Da jedoch dabei die Symmetrie verloren geht, so nehme ich von der Angabe des Resultates Abstand.

Es folgt aber hieraus die Bemerkung, dass die beiden Integrale u_1 und u_2 nicht nur für solche specielle Werte der Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, welche sich in der Form (37) darstellen lassen, reducierbar sind, sondern *für beliebige Werte dieser Parameter, welche den Gleichungen:*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0$$

genügen. —

Schliesslich mag hier noch erwähnt werden, dass die Gleichungen (29) und (36) die Lösung der Aufgabe für $k = 2$ geben, wenn man darin τ_{11}, τ_{22} durch $\frac{\tau_{11}}{2}$, $\frac{\tau_{22}}{2}$ ersetzt.

Man findet nach einfacher Rechnung für die zu den Moduln:

$$\tau_{11}, \ \frac{1}{2}, \ \tau_{22}$$

gehörige Normalform (19):

$$y^2 = \frac{4\pi^2}{\alpha'^2\beta^2 - \alpha^2\beta'^2}\,(\alpha^2 + \alpha'^2 x^2)\,(\beta^2 + \beta'^2 x^2)\,(\gamma^2 + \gamma'^2 x^2)$$

worin die $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ durch (37) definiert werden, wenn darin $\tau_1 = 2\,\tau_{11}$, $\tau_2 = 2\,\tau_{22}$ gesetzt wird, und die beiden zugehörigen Normalintegrale erster Gattung:

$$u_1 = \int \frac{dx}{y} \quad \text{und} \quad u_2 = \int \frac{x\,dx}{y}$$

sind, wie unmittelbar zu sehen, durch Transformationen zweiten Grades reducierbar. —

V.

Herstellung der reducierenden rationalen Functionen für $k = 4$.

Es bleiben nun noch die rationalen Functionen vierten Grades zu bestimmen, durch welche die beiden Integrale u_1 und u_2 auf elliptische Integrale reduciert werden.

Herr Picard hat in der mehrfach citierten Abhandlung allgemein bewiesen, dass die Function:

$$(\sin \operatorname{am} (u_1, c))^2, \text{ wo}$$

$$c = \frac{\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_2}{\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_3},$$

eine rationale Function $k$ten Grades der oberen Grenze des Integrals u_1 ist, und auch einen Weg angedeutet, wie man mit Hilfe der Methode der unbestimmten Coefficienten durch ein Recursionsverfahren diese rationale Function herstellen kann.

Im folgenden werde ich einen andern Weg einschlagen, der unmittelbar durch die Transformationstheorie der ϑ-Functionen dargeboten wird. Wir gehen dazu von den Gleichungen des Umkehrproblems aus; dieselben lauten bei Zugrundelegung unserer Normalform nach (21):

$$v_1 = \int\limits_{(\varepsilon_1, 0)}^{(x_1, y_1)} \frac{dx}{y} + \int\limits_{(\varepsilon_2, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{dx}{y}$$

$$v_2 = \int\limits_{(\varepsilon_1, 0)}^{(x_1, y_1)} \frac{x\,dx}{y} + \int\limits_{(\varepsilon_2, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{x\,dx}{y} \tag{47}$$

wo wieder: $\varepsilon_1 = -\frac{\vartheta_3^{(1)}}{\vartheta_3^{(2)}}$, $\varepsilon_2 = -\frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$, während y durch Gleichung (19) definiert ist.

Setzt man andererseits:

$$s = \left[\frac{\vartheta(0 \mid k\tau_{11})_3 \;\vartheta(kv_1 \mid k\tau_{11})_1}{\vartheta(0 \mid k\tau_{11})_2 \;\vartheta(kv_1 \mid k\tau_{11})_0}\right]^2 \tag{48}$$

so ist nach bekannten Formeln:

$$2\,k\pi\,\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_3 \cdot v_1 = \int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-c^2 s)}} \tag{49}$$

wo wieder:

$$c = \frac{\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_2}{\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_3},$$

also durch Vergleichung mit (47):

$$\int\limits_{(\varepsilon_1, 0)}^{(x_1, y_1)} \frac{dx}{y} + \int\limits_{(\varepsilon_2, 0)}^{(x_2, y_2)} \frac{dx}{y} = \frac{1}{2\,k\pi\,\vartheta^2(0 \mid k\tau_{11})_3} \int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-c^2 s)}} \tag{50}$$

Hierin ist aber s eine algebraische Function von x_1 und x_2. Denn es ist nach (27)

$$\frac{\vartheta(kv_1 \mid k\tau_{11})_1}{\vartheta(kv_1 \mid k\tau_{11})_0} = \frac{\vartheta(kv_1, kv_2;\; k\tau_{11}, 1, k\tau_{22})_1}{\vartheta(kv_1, kv_2;\; k\tau_{11}, 1, k\tau_{22})_{12}}; \tag{51}$$

edi Functionen:

$$\vartheta(kv_1, kv_2;\; k\tau_{11}, 1, k\tau_{22})_\lambda$$

lassen sich als homogene Functionen $k$ten Grades der Functionen:

$$\vartheta\left(v_1, v_2;\; \tau_{11}, \frac{1}{k}, \tau_{22}\right)_\lambda$$

ausdrücken, und die Quotienten von je zwei ϑ-Functionen dieser letzteren Art ergeben sich bekanntlich durch Umkehrung der Gleichungen (47) als algebraische Functionen von x_1 und x_2. Somit ist in der That s eine algebraische Function von x_1 und x_2.

Hiermit ist zunächst gezeigt, wie man die *Summe* zweier unserer hyperelliptischen Integrale auf ein elliptisches Integral reducieren kann.

Um hieraus die Reduction *eines einzigen* hyperelliptischen Integrals zu erhalten, hat man nur in (50) die obere Grenze eines der beiden Integrale der unteren gleichzusetzen, z. B.

$$x_2 = -\frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$$

dann verschwindet, bei passender Wahl des Integrationsweges, das zweite Integral, v_1 geht also über in u_1 und die Gleichung (50) wird:

$$\frac{1}{2k\pi\,\vartheta^2(0\mid k\tau_{11})_3}\int\limits_0^s \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)(1-c^2 s)}} = \int\limits_{(\varepsilon_1,\,0)}^{(x,\,y)} \frac{dx}{y} \tag{52}$$

$$\text{wo } \varepsilon_1 = -\frac{\vartheta_3^{(1)}}{\vartheta_3^{(2)}}.$$

Indem man $x_2 = -\dfrac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$ setzt, geht die algebraische Function s von x_1 und x_2 in eine algebraische Function der einzigen Variabeln x_1 über, und zwar in eine rationale Function von x_1, welche eben nichts anderes ist als die gesuchte rationale Function $k$ten Grades, welche die Reduction des Integrals u_1 vermittelt.

Um dies Verfahren für den Fall $k = 4$ durchzuführen, haben wir zunächst

$$\vartheta(4v_1,\, 4v_2;\; 4\tau_{11},\, 1,\, 4\tau_{22})_1$$
$$\text{und } \vartheta(4v_1,\, 4v_2;\; 4\tau_{11},\, 1,\, 4\tau_{22})_{12}$$

durch zweimalige Anwendung der Transformation:

$$\left\{\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \tag{53}$$

als homogene Functionen vierten Grades der Functionen

$$\vartheta\left(v_1,\, v_2;\;\tau_{11},\, \frac{1}{4},\, \tau_{22}\right)_\lambda$$

darzustellen. Man erhält die für den vorliegenden Zweck geeignetsten Formeln für die Transformation der ϑ-Functionen, wenn man in den von Herrn Königsberger[1]) für die Transformation (53) angegebenen Formeln v_1, v_2 durch:

$$v_1 + \frac{\tau_{12}}{2},\quad v_2 + \frac{\tau_{22}}{2}$$

ersetzt. Führt man wieder zur Abkürzung die auf pg. 21 und 22 definierten Zeichen θ_λ und φ_λ ein, so lauten die für das folgende erforderlichen Formeln:

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_{14}\,\varphi(4v_1, 4v_2)_1 &= \theta(2v_1, 2v_2)_4\,\theta(2v_1, 2v_2)_{04} - \theta(2v_1, 2v_2)_3\,\theta(2v_1, 2v_2)_{03} \\ 2\varphi_{03}\,\varphi(4v_1, 4v_2)_{12} &= \theta(2v_1, 2v_2)_3\,\theta(2v_1, 2v_2)_{04} + \theta(2v_1, 2v_2)_{03}\,\theta(2v_1, 2v_2)_4 \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

ferner:

$$\left.\begin{aligned} 4\theta_5\,\theta(2v_1, 2v_2)_4 &= -\vartheta^2(v_1, v_2)_3 + \vartheta^2(v_1, v_2)_{03} - \vartheta^2(v_1, v_2)_{04} + \vartheta^2(v_1, v_2)_4 \\ 4\theta_0\,\theta(2v_1, 2v_2)_{04} &= 2\,\vartheta(v_1, v_2)_3\,\vartheta(v_1, v_2)_{03} + 2\,\vartheta(v_1, v_2)_4\,\vartheta(v_1, v_2)_{04} \\ 4\theta_{34}\,\theta(2v_1, 2v_2)_3 &= 2\,\vartheta(v_1, v_2)_4\,\vartheta(v_1, v_2)_3 + 2\,\vartheta(v_1, v_2)_{04}\,\vartheta(v_1, v_2)_{03} \\ 4\theta_{12}\,\theta(2v_1, 2v_2)_{03} &= 2\,\vartheta(v_1, v_2)_{03}\,\vartheta(v_1, v_2)_4 - 2\,\vartheta(v_1, v_2)_3\,\vartheta(v_1, v_2)_{04} \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

[1]) Borchardts Journal, Bd. 64, pg. 38.

Berücksichtigt man einerseits, dass nach (28):

$$\varphi_{14} = - i\,\vartheta(0 \mid \tau_1)_2\,\vartheta(0 \mid \tau_2)_2;$$
$$\varphi_{03} = \vartheta(0 \mid \tau_1)_3\,\vartheta(0 \mid \tau_2)_2$$

andererseits, dass für $x_2 = -\dfrac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$

$$\vartheta(v_1, v_2)_3 \equiv 0$$

so erhält man mit Hilfe der Gleichungen (51), (54) und (55) für die durch (48) definierte Grösse s den Ausdruck:

$$s = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{04}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_{03}}\left[\frac{\theta_{12}\,\theta_{34}\,(\vartheta^2(v_1, v_2)_{03} - \vartheta^2(v_1, v_2)_{04} + \vartheta^2(v_1, v_2)_4) - 2\,\theta_5\,\theta_0\,\vartheta^2(v_1, v_2)_{03}}{\theta_0\,\theta_{34}\,(\vartheta^2(v_1, v_2)_{03} - \vartheta^2(v_1, v_2)_{04} + \vartheta^2(v_1, v_2)_4) + 2\,\theta_5\,\theta_{12}\,\vartheta^2(v_1, v_2)_{04}}\right]^2 \qquad (56)$$

Setzt man in den Formeln (22):

$$x_2 = -\frac{\vartheta_1^{(1)}}{\vartheta_1^{(2)}}$$

so erhält man für die hier auftretenden ϑ-Functionen ausser der bereits benutzten Gleichung:

$$\vartheta(v_1, v_2)_3 = 0, \text{ weiter:}$$

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_4}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} = \frac{\vartheta_{23}\,\vartheta_4\,\vartheta_{03}}{\vartheta_{01}\,\vartheta_5\,\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}\,x_1}{\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x_1}$$

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{03}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} = -\frac{\vartheta_2\,\vartheta_4\,\vartheta_{03}}{\vartheta_{14}\,\vartheta_5\,\vartheta_{12}}\,\frac{\vartheta_{24}^{(1)} + \vartheta_{24}^{(2)}\,x_1}{\vartheta_1^{(1)} + \vartheta_1^{(2)}\,x_1}$$

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{04}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_5} = -\frac{\vartheta_2\,\vartheta_{23}}{\vartheta_5\,\vartheta_{12}}\,\frac{(\vartheta_{04}^{(1)} + \vartheta_{04}^{(2)}\,x_1)(\vartheta_3^{(1)} + \vartheta_3^{(2)}\,x_1)}{(\vartheta_1^{(1)} + \vartheta_1^{(2)}\,x_1)(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x_1)}$$

Hieraus folgt, wenn wir jetzt wieder x statt x_1 schreiben:

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{03}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_4} = -\frac{\vartheta_2\,\vartheta_{01}}{\vartheta_{14}\,\vartheta_{23}}\,\frac{(\vartheta_{13}^{(1)} + \vartheta_{13}^{(2)}\,x)(\vartheta_{24}^{(1)} + \vartheta_{24}^{(2)}\,x)}{(\vartheta_1^{(1)} + \vartheta_1^{(2)}\,x)(\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}\,x)}$$

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{04}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_4} = -\frac{\vartheta_2\,\vartheta_{01}}{\vartheta_4\,\vartheta_{03}}\,\frac{(\vartheta_3^{(1)} + \vartheta_3^{(2)}\,x)(\vartheta_{04}^{(1)} + \vartheta_{04}^{(2)}\,x)}{(\vartheta_1^{(1)} + \vartheta_1^{(2)}\,x)(\vartheta_{02}^{(1)} + \vartheta_{02}^{(2)}\,x)}$$

oder nach (41):

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{03}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_4} = \frac{C}{A}\,\frac{U}{W}$$

$$\frac{\vartheta^2(v_1, v_2)_{04}}{\vartheta^2(v_1, v_2)_4} = -\frac{C}{B}\,\frac{V}{W}$$

Hiernach geht der Ausdruck (56) für s über in:

$$s = \frac{1}{c^2}\,\frac{A}{B}\,\frac{V}{U}\left[\frac{\theta_{12}\,\theta_{34}\,(BCU + CAV + ABW) - 2\,\theta_5\,\theta_0\,BCU}{\theta_0\,\theta_{34}\,(BCU + CAV + ABW) - 2\,\theta_5\,\theta_{12}\,ACV}\right]^2$$

Nun war aber (39):

$$A = -\theta_0^2,\ B = \theta_{12}^2,\ C = \theta_{34}^2$$

und es folgt aus (25d):

$$\theta_5\,\theta_0\,\theta_{12}\,\theta_{34} = \beta'^2\gamma^2 - \beta^2\gamma'^2 = \gamma'^2\alpha^2 - \gamma^2\alpha'^2 = \alpha'^2\beta^2 - \alpha^2\beta'^2.$$

Setzt man ferner:

$$S = (\alpha^3\alpha' + \beta^3\beta' + \gamma^3\gamma') + i(\gamma^2\beta'^2 - \gamma'^2\beta^2)\,x + (\alpha\,\alpha'^3 + \beta\,\beta'^3 + \gamma\,\gamma'^3)\,x^2$$

so ist

$$BCU + CAV + ABW = 2(\beta'^2\gamma^2 - \beta^2\gamma'^2)\,S.$$

Daher erhält man für s:

$$s = -\frac{1}{c^2}\,\frac{V(S-U)^2}{U\,(S+V)^2} \tag{57}$$

Zähler und Nenner dieses Ausdrucks sind ganze Functionen 6ten Grades von x; nun wissen wir aber nach dem oben angeführten Satz von Herrn Picard, dass s eine rationale Function vierten Grades von x sein muss; es müssen also Zähler und Nenner einen gemeinsamen Teiler zweiten Grades haben. Da U und V keinen gemeinsamen Teiler haben, so müssen $S - U$ und $S + V$ einen gemeinsamen Teiler ersten Grades besitzen.

In der That ergibt die Rechnung, dass die Wurzeln der Gleichung $S - U$ sind:

$$\frac{i(\alpha^2 A - \beta^2 B)}{C\gamma\gamma'} \text{ und } \frac{i B\beta\beta'}{\gamma'^2 C - \alpha'^2 A}.$$

Beachtet man nun, dass $S - U$ in $S + U$ übergeht, wenn man α mit α', β mit β', γ mit γ' vertauscht, x durch $-\frac{1}{x}$ ersetzt, und schliesslich mit x^2 multipliciert (vgl. pg. 30); und ferner, dass $S + U$ in $S + V$ übergeht durch gleichzeitige cyclische Vertauschung von α, β, γ und α', β', γ', so findet man ohne weitere Rechnung durch Buchstabenvertauschung, dass die Wurzeln von $S + V = 0$ sind:

$$\frac{i A\alpha\alpha'}{\beta'^2 B - \gamma'^2 C} \text{ und } \frac{i(\alpha^2 A - \beta^2 B)}{C\gamma\gamma'};$$

$S - U$ und $S + V$ haben also in der That die gemeinsame Wurzel:

$$\frac{i(\alpha^2 A - \beta^2 B)}{C\gamma\gamma'}$$

Man erhält so das folgende Schlussresultat, das ich um alle überflüssigen Weitläufigkeiten wegen der Mehrdeutigkeit der Integrale und Quadratwurzeln zu vermeiden, nur für die Quadrate der Differentiale aussprechen will:

Die Differentialgleichung:

$$-\frac{1}{16}\,\frac{ds^2}{s(1-s)(\alpha^2+\beta^2 s)} = ABC(BC + CA + AB)\,\frac{dx^2}{UVW} \tag{58}$$

wird befriedigt durch die rationale Function vierten Grades:

$$s = K\cdot\frac{[(\gamma'^2 C - \alpha'^2 A)\,x^2 + 2\,i\beta\beta' B\,x - (\gamma^2 C - \alpha^2 A)]\,[(\gamma'^2 C - \alpha'^2 A)\,x - i\beta\beta' B]^2}{[(\beta'^2 B - \gamma'^2 C)\,x^2 + 2\,i\alpha\alpha' A\,x - (\beta^2 B - \gamma^2 C)]\,[(\beta'^2 B - \gamma'^2 C)\,x - i\alpha\alpha' A]^2} \tag{59}$$

Darin sind $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ willkürliche Parameter, welche nur den beiden Bedingungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0$$

genügen müssen; A, B, C sind die durch (39) definierten Functionen derselben; U, V, W sind ganze Functionen zweiten Grades von x, welche durch (40) definiert werden, und endlich hat die Constante k den Wert:

$$K = \frac{\alpha^4 \alpha'^2 A^2 (\gamma^2 C - \alpha^2 A - 3\beta^2 B)^2}{\beta^4 \beta'^2 B^2 (\gamma^2 C - \beta^2 B - 3\alpha^2 A)^2} \tag{60}$$

Es bleibt nun nur noch übrig, *auch für das zweite reducierbare Integral u_2 die reducierende rationale Function vierten Grades zu bestimmen.* Diese Aufgabe lässt sich aber nach den am Ende des zweiten Abschnitts angestellten Betrachtungen ohne alle Rechnung durch blosse Buchstabenvertauschung lösen. Die Gleichungen (58), (59) bleiben richtig, wenn man darin gleichzeitig α mit α', β mit β', γ mit γ' vertauscht; ersetzt man dann noch x durch $-\frac{1}{x}$, so geht nach der auf pg. 30 hervorgehobenen Eigenschaft der Functionen U, V, W die Gleichung (59) über in:

$$\frac{1}{16} \frac{ds'^2}{s'(1-s')(\alpha'^2 + \beta'^2 s')} = ABC(BC + CA + AB) \frac{x^2\, dx^2}{U\,V\,W} \tag{61}$$

Darin ist s' diejenige rationale Function vierten Grades, in welche s bei Ausführung der genannten Vertauschung übergeht.

Hiermit ist das Problem der Reduction vierten Grades der hyperelliptischen Integrale erster Ordnung und erster Gattung mit Hilfe der Transformationstheorie der ϑ-Functionen vollständig gelöst.

VI.

Algebraische Lösung der Aufgabe.

Als Ergänzung zu dem bisherigen mag schliesslich noch die rein *algebraische Lösung* der in den beiden letzten Abschnitten behandelten Aufgabe hier Platz finden. Man wird dabei auf eine andere Wahl der beiden unabhängigen Parameter geführt, bei welcher die Ausdrücke für die Constanten der reducierbaren Integrale und die reducierenden rationalen Functionen einfacher, dagegen die Moduln der elliptischen Integrale und vor allem die Formeln, durch welche der Uebergang von dem ersten Integral zum zweiten vermittelt wird, complicierter werden.

Angenommen das Integral

$$\int \frac{(Px + Q)\, dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo $R(x)$ wieder eine ganze Function sechsten Grades bedeutet, deren sämmtliche Wurzeln von einander verschieden sind, sei durch eine rationale Transformation vierten Grades:

$$z = \frac{F(x)}{G(x)}$$

auf das elliptische Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-\gamma_0)(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)(z-\gamma_3)}}$$

reducierbar. Man kann dann — ebenso wie es Herr Goursat[1]) für die Reduction dritten Grades gethan hat — durch gleichzeitige lineare Transformation der Variabeln x und z bewirken, dass der Coefficient von x^3 in $F(x)$ und $G(x)$ verschwindet, dass $G(x)$ sich auf den zweiten Grad erniedrigt und dass der Coefficient der höchsten Potenz von x in $F(x)$ und in $G(x)$ gleich 1 ist. Dann muss es nach Jacobi möglich sein, die Constanten $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3; \varrho$ so zu bestimmen, dass:

$$\left.\begin{aligned} F(x) - \gamma_0 G(x) &= (x+\varrho)^2 \\ F(x) - \gamma_1 G(x) &= (x^2 - 2\xi_1 x + \eta_1)(x+\xi_1)^2 \\ F(x) - \gamma_2 G(x) &= (x^2 - 2\xi_2 x + \eta_2)(x+\xi_2)^2 \\ F(x) - \gamma_3 G(x) &= (x^2 - 2\xi_3 x + \eta_3)(x+\xi_3)^2 \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

wobei

$$(x^2 - 2\xi_1 x + \eta_1)(x^2 - 2\xi_2 x + \eta_2)(x^2 - 2\xi_3 x + \eta_3) = R(x)^{2})$$

Wir wählen die drei durch die Gleichung

$$x^3 + 3\lambda x^2 + 3\mu x + \nu = (x+\xi_1)(x+\xi_2)(x+\xi_3)$$

definierten Grössen λ, μ, ν zu unabhängigen Parametern. Durch Elimination von F und G aus (62) erhält man nach einfacher Rechnung:

$$\varrho = -\frac{\nu}{\lambda}, \quad \eta_1 = \frac{3(\mu\xi_1 - \nu)}{\lambda - \xi_1}, \quad \eta_2 = \frac{3(\mu\xi_2 - \nu)}{\lambda - \xi_2}, \quad \eta_3 = \frac{3(\mu\xi_3 - \nu)}{\lambda - \xi_3}$$

und weiter, wenn man γ_0, welches noch willkürlich blieb, gleich $\frac{2\nu}{\lambda}$ setzt:

$$\gamma_1 = -\frac{6(\lambda\xi_1^2 - \mu\xi_1)}{\lambda - \xi_1}, \quad \gamma_2 = -\frac{6(\lambda\xi_2^2 - \mu\xi_2)}{\lambda - \xi_2}, \quad \gamma_3 = -\frac{6(\lambda\xi_3^2 - \mu\xi_3)}{\lambda - \xi_3}$$

Hieraus ergibt sich das folgende Resultat[3]):

Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= -\frac{1}{3}\,\frac{2\lambda^2\nu - \lambda\mu^2 - \mu\nu}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu - 2\mu^3} \\ \mu' &= \frac{1}{9}\,\frac{\lambda^2\mu + \lambda\nu - 2\mu^2}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu - 2\mu^3} \\ \nu' &= -\frac{1}{27}\,\frac{2\lambda^3 - 3\lambda\mu + \nu}{-\nu^2 + 3\lambda\mu\nu - 2\mu^3} {}^{4)} \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

---

[1]) Bulletin de la Société mathématique de France, Tome XIII.

[2]) Es lässt sich zeigen, dass für eine beliebige Reduction geraden ($2k$'ten) Grades diejenigen Zerlegungen von $R(x)$ in vier Factoren, bei welchen zwei oder mehr Factoren vom nullten Grade sind, sich aus einer Reduction vom Grade k' und aus einer Transformation zweiten Grades des elliptischen Integrals zusammensetzen lassen. Man braucht daher nur die Zerlegung in einen Factor nullten und drei Factoren zweiten Grades zu berücksichtigen.

[3]) Dasselbe ist bereits in den Sitzungsberichten der Naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg von mir 1885 veröffentlicht worden.

[4]) Sind C_0, $3C_1$, $3C_2$, C_3 die Coefficienten der cubischen Covariante der Form: $x_1^3 + 3\lambda x_1^2 x_2 + 3\mu x_1 x_2^2 + \nu x_2^3$, so ist

$$\lambda' = -\frac{1}{3}\frac{C_2}{C_3}, \quad \mu' = \frac{1}{9}\frac{C_1}{C_3}, \quad \nu' = -\frac{1}{27}\frac{C_0}{C_3}.$$

und

$$R(x;\, \lambda, \mu, \nu) = \nu' x^6 - 6\lambda\nu' x^5 + 3(4\mu\nu' + \lambda\mu') x^4 + 2(\lambda\lambda' + 5\nu\nu') x^3 + \\ + 3(4\mu'\nu + \lambda'\mu) x^2 - 6\lambda'\nu x + \nu,$$

so lässt sich jedes Integral erster Ordnung und erster Gattung, welches durch eine rationale Transformation vierten Grades auf ein elliptisches reducierbar ist, durch eine lineare Transformation auf die Form bringen:

$$\text{Const.} \int \frac{dx}{\sqrt{R(x;\, \lambda, \mu, \nu)}}$$

und zwar ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x;\, \lambda, \mu, \nu)}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z;\, \lambda, \mu, \nu)}},$$

wo:

$$R_1(z;\, \lambda, \mu, \nu) = (\lambda z - 2\nu)\,[\nu' z^3 - 3(9\lambda^2\nu' - 6\mu\nu' - \lambda\mu') z^2 + \\ + 12(9\lambda\nu\nu' + 3\mu'\nu + \lambda'\mu) z + 12\nu(3\mu\mu' - \lambda\lambda')] \qquad (64)$$

und

$$z = \frac{\lambda x^4 + 4\lambda\nu x + 3\mu\nu}{\lambda x^2 + 2\lambda^2 x + \frac{(3\lambda\mu - \nu)}{2}}.$$

Die Anzahl der willkürlichen Parameter lässt sich auf zwei reducieren, wenn man setzt:

$$\frac{\mu}{\lambda^2} = a, \quad \frac{\nu}{\lambda^3} = b, \quad x = \lambda\, \text{t}.$$

Hieraus erhält man dann das zweite Integral auf folgende Weise:

Die Gleichungen (63) haben die Eigentümlichkeit, dass sie, nach λ, μ, ν aufgelöst, für λ, μ, ν dieselben Functionen von λ', μ', ν' ergeben, welche λ', μ', ν' von $\lambda\ \mu\ \nu$ sind. Man überzeugt sich hiervon mit Hilfe der Relationen:

$$3\lambda\lambda' - 9\mu\mu' - 27\nu\nu' + 1 = 0$$
$$\lambda + 6\mu\lambda' + 9\mu'\nu = 0$$
$$\lambda' + 6\mu'\lambda + 9\mu\nu' = 0,$$

welche sich unmittelbar aus den Gleichungen (63) ergeben.

Es ist daher erlaubt in (64) gleichzeitig λ mit λ', μ mit μ', ν mit ν' zu vertauschen; ersetzt man überdies x durch $\frac{1}{x}$, so geht (64) über in:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{R(x;\, \lambda, \mu, \nu)}} = -\frac{\sqrt{\lambda'}}{2} \int \frac{dz'}{\sqrt{R_1(z';\, \lambda', \mu', \nu')}}, \qquad (65)$$

wobei

$$z' = \frac{\lambda' + 4\lambda'\nu' x^3 + 3\mu'\nu' x^4}{\lambda' x^2 + 2\lambda'^2 x^3 + \frac{(3\lambda'\mu' - \nu')}{2} x^4}.$$

VITA.

Natus sum Oskar Bolza die XII. mensis Mai anni h. s. LVII Tabernis Montanis, in oppido Palatinatus Rhenani, patre Mauritio, matre Ludovica e gente König. Fidei addictus sum evangelicae. Primis literarum elementis imbutus per octo annos gymnasia frequentavi Frankenthalense, Stuttgartense, Neuchatelense, Friburgense. Testimonium maturitatis Friburgi auctumno anni h. s. LXXV adeptus rebus mathematicis atque physicis operam dedi in universitatibus Heidelbergensi, Argentoratensi, Goettingensi, Berolinensi. Legentes audivi viros clarissimos: Bruns, Bunsen, Christoffel, Curtius, Harms, v. Helmholtz, Kirchhoff, Kny, Kummer, Kundt, Listing, Nuhn, Pagenstecher, Pfitzer, Quincke, Reye, Schwarz, v. Treitschke, Wangerin, Weierstrass, Zeller. Seminario mathematico, cui viri ill. Kummer et Weierstrass praeerant, per bis sex menses interfui, nec minus colloquiis mathematicis a viro ill. Schwarz habitis. Rebus physicis operam dedi in laboratoriis Berolinensi, Heidelbergensi, Argentoratensi.

Examine, quod dicitur pro facultate docendi Berolini anno h. s. LXXXII superato per annum in Gymnasio Friburgensi candidati probandi munere functus sum.

Tum Berolinum reversus audivi viros clarissimos Fuchs et Knoblauch.

Omnibus, quorum scholis interfui, optime de me meritis, imprimis viris ill. Fuchs, Kundt, Schwarz, Weierstrass nec minus praeceptori carissimo S. Koch maximas, quas possum, gratias ago semperque habebo.